

정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출
문제집

미적분 I 상

내신에 날개를 달아 주는 100발100중!



I 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한

교과서 예제

p.7

- 01 (1) 3 (2) 0 (3) -2 (4) 2 (5) 0 (6) 1
 02 (1) ∞ (2) $-\infty$
 03 (1) 1 (2) 0 (3) 1
 04 (1) 0 (2) 존재하지 않는다.
 05 (1) 12 (2) 2 (3) 6 (4) -8 (5) -2 (6) -5
 06 (1) 9 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) 2
 07 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 3 (4) 4 (5) $\frac{1}{9}$
 08 (1) $a=3, b=2$ (2) $a=8, b=3$
 09 2

기출 Best | 1회

p.8~11

- 01 ② 02 ② 03 ③ 04 ① 05 ④
 06 ④ 07 ③ 08 ② 09 ⑤ 10 ②
 11 ⑤ 12 ③ 13 ② 14 ⑤ 15 ①
 16 ⑤ 17 ② 18 ⑤ 19 ⑤ 20 ③

기출 Best | 2회

p.12~15

- 01 ③ 02 ① 03 ⑤ 04 ① 05 ③
 06 ① 07 ② 08 ② 09 ⑤ 10 ②
 11 ⑤ 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15 ③
 16 ④ 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20 ①

변형유형 집중공략

p.16~19

- 1-1 2 1-2 ④ 2-1 2 2-2 16
 3-1 ② 3-2 -10 4-1 2 4-2 4

서술형 What & How

p.20~23

- 1 2 2 3 3 3 4 1
 5 -8 6 4 7 2 8 2

실전 문제 | 1회

p.24~27

- 01 ③ 02 ① 03 ③ 04 ⑤ 05 ②
 06 ⑤ 07 ② 08 ① 09 ③ 10 ⑤
 11 ④ 12 ② 13 ② 14 ② 15 ④
 16 ④ 17 ③ 18 1 19 2

실전 문제 | 2회

p.28~31

- 01 ④ 02 ② 03 ④ 04 ③ 05 ②
 06 ③ 07 ⑤ 08 ④ 09 ④ 10 ①
 11 ② 12 ④ 13 ⑤ 14 ② 15 ①
 16 ② 17 ② 18 130 19 -1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.32~36

- 1 ③ 2 ② 3 16 4 4 5 25
 6 ⑤ 7 226 8 -3 9 ② 10 ③

2 함수의 연속

교과서 예제

p.39

- 01 (1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속 (4) 불연속
 02 (1) $[1, 2]$ (2) $[-3, 2)$ (3) $\{x | -1 < x < 6\}$ (4) $\{x | x \geq 2\}$
 03 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $[-5, 5]$
 (3) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (4) $[-6, \infty)$
 04 4
 05 $\neg, \wedge, \vee, \supset$
 06 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -4 (2) 최댓값: 5, 최솟값: 3
 (3) 최댓값: -1 , 최솟값: -2 (4) 최댓값: 3, 최솟값: 1
 07 $-1, 0, 1, -2, 0, -1, 0$

기출 Best | 1회

p.40~42

- 01 ② 02 ③ 03 ② 04 ③ 05 ②
 06 ④ 07 ① 08 ③ 09 ⑤ 10 ③
 11 ③ 12 ④ 13 ② 14 ⑤ 15 ②

기출 Best | 2회

p.43~45

- 01 ④ 02 ③ 03 ④ 04 ① 05 ④
 06 ③ 07 ⑤ 08 ② 09 ③ 10 ①
 11 ⑤ 12 ② 13 ④ 14 ③ 15 ③

변형유형 집중공략

p.46~49

- 1-1 5 1-2 70 2-1 31 2-2 16
 3-1 3 3-2 4 4-1 -1 4-2 -25

서술형 What & How

p.50~53

- 1 27 2 13 3 2 4 9
5 10 6 -10 7 3 8 10

실전 문제 | 1회

p.54~57

- 01 ② 02 ③ 03 ⑤ 04 ③ 05 ③
06 ④ 07 ① 08 ③ 09 ② 10 ②
11 ③ 12 ⑤ 13 ① 14 ④ 15 ③
16 ① 17 ③ 18 -1 19 3

실전 문제 | 2회

p.58~61

- 01 ② 02 ③ 03 ⑤ 04 ⑤ 05 ③
06 ③ 07 ① 08 ④ 09 ① 10 ③
11 ② 12 ⑤ 13 ③ 14 ④ 15 ①
16 ④ 17 ② 18 20 19 0

수능형 기출문제 & 변형문제

p.62~64

- 1 ⑤ 2 ③ 3 24
4 15 5 ③ 6 ③

II 미분

1 미분계수와 도함수

교과서 예제

p.67

- 01 (1) -2 (2) 0
02 (1) -5 (2) 1
03 (1) 4 (2) 16
04 (1) 7 (2) -3
05 (가) 0 (나) 연속 (다) 1 (라) -1 (마) 미분가능하지 않다
06 (1) 4 (2) -4 (3) 미분가능하지 않다.
07 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=1$ (3) $f'(x)=-2x$ (4) $f'(x)=3x^2$
08 3
09 (1) $y'=0$ (2) $y'=-1$ (3) $y'=6x+2$ (4) $y'=x^2-5x$
(5) $y'=4x^3-9x^2+2x-3$ (6) $y'=3x^2+6x+2$

기출 Best | 1회

p.68~71

- 01 ④ 02 ② 03 ① 04 ③ 05 ②
06 ② 07 ⑤ 08 ④ 09 ② 10 ①
11 ② 12 ② 13 ⑤ 14 ③ 15 ④
16 ② 17 ④ 18 ③ 19 ① 20 ⑤
21 ⑤

기출 Best | 2회

p.72~75

- 01 ② 02 ② 03 ① 04 ⑤ 05 ①
06 ① 07 ④ 08 ⑤ 09 ③ 10 ①
11 ⑤ 12 ④ 13 ② 14 ② 15 ⑤
16 ⑤ 17 ① 18 ③ 19 ① 20 ④
21 ⑤

변형유형 집중공략

p.76~79

- 1-1 9 1-2 12 2-1 -5 2-2 16
3-1 -6 3-2 -2 4-1 -1 4-2 -4

서술형 What & How

p.80~83

- 1 7 2 1 3 3 4 4
5 2 6 -5 7 8 8 27

실전 문제 | 1회

p.84~87

- 01 ④ 02 ③ 03 ② 04 ③ 05 ②
06 ① 07 ④ 08 ④ 09 ⑤ 10 ①
11 ① 12 ② 13 ⑤ 14 ③ 15 ④
16 ⑤ 17 ④ 18 ② 19 23 20 7

실전 문제 | 2회

p.88~91

- 01 ① 02 ④ 03 ③ 04 ② 05 ①
06 ④ 07 ① 08 ③ 09 ① 10 ③
11 ② 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ③ 15 ③
16 ② 17 ① 18 ⑤ 19 -1 20 24

수능형 기출문제 & 변형문제

p.92~96

- 1 11 2 17 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ③ 7 ① 8 ② 9 ② 10 ③

2 도함수의 활용 (1)

교과서 예제

p.99

- 01 (1) 6 (2) 5 (3) -3
02 (1) $y=4x+3$ (2) $y=5x-8$ (3) $y=-4x+3$
03 (1) $y=4x-5$ (2) $y=-9x-26$, $y=-9x+6$ (3) $y=x-1$
04 (1) $y=-2x+3$, $y=2x-1$ (2) $y=3x+3$
05 (1) 1 (2) -1
06 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\sqrt{3}$
07 1

기출 Best | 1회

p.100~102

- 01 ① 02 ② 03 ⑤ 04 ④ 05 ④
06 ① 07 ④ 08 ② 09 ④ 10 ⑤
11 ⑤ 12 ③ 13 ① 14 ③ 15 ①
16 ⑤

기출 Best | 2회

p.103~105

- 01 ① 02 ⑤ 03 ① 04 ② 05 ②
06 ③ 07 ① 08 ① 09 ① 10 ②
11 ② 12 ② 13 ① 14 ④ 15 ④
16 ④

변형유형 집중공략

p.106~107

- 1-1 27 1-2 2 2-1 ③ 2-2 6

서술형 What & How

p.108~111

- 1 -8 2 5 3 3 4 2
5 8 6 -9 7 -4 8 10

실전 문제 | 1회

p.112~115

- 01 ④ 02 ⑤ 03 ① 04 ② 05 ④
06 ④ 07 ④ 08 ④ 09 ⑤ 10 ③
11 ③ 12 ⑤ 13 ② 14 ④ 15 ⑤
16 ③ 17 ⑤ 18 -84 19 16

실전 문제 | 2회

p.116~119

- 01 ④ 02 ③ 03 ② 04 ② 05 ④
06 ② 07 ⑤ 08 ② 09 ② 10 ⑤
11 ④ 12 ① 13 ④ 14 ④ 15 ⑤
16 ③ 17 ④ 18 -9 19 2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.120~122

- 1 ⑤ 2 ④ 3 ⑤
4 ① 5 ③ 6 ②

3 도함수의 활용 (2)

교과서 예제

p.125

- 01 (1) 증가 (2) 감소 (3) 증가
02 (1) 구간 $(-\infty, \frac{1}{3}]$, $[1, \infty)$ 에서 증가하고,
구간 $[\frac{1}{3}, 1]$ 에서 감소한다.
(2) 구간 $[0, 1]$, $[2, \infty)$ 에서 증가하고,
구간 $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$ 에서 감소한다.
03 구간 $[-1, 3]$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$ 에서
감소한다.
04 극댓값: 2, 극솟값: -2
05 (1) b, d, h (2) a, c, e
06 (1) 극댓값: 6, 극솟값: -26 (2) 극댓값: 3, 극솟값: 2
07 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
08 (1) 최댓값: 12, 최솟값: -15
(2) 최댓값: 16, 최솟값: -1
09 $12\sqrt{3}$

기출 Best | 1회

p.126~129

- 01 ④ 02 ② 03 ③ 04 ② 05 ⑤
06 ② 07 ② 08 ④ 09 ⑤ 10 ③
11 ② 12 ③ 13 ② 14 ⑤ 15 ①
16 ③ 17 ② 18 ④ 19 ⑤ 20 ①

기출 Best | 2회

p.130~133

01 ②	02 ③	03 ⑤	04 ①	05 ⑤
06 ④	07 ⑤	08 ①	09 ⑤	10 ①
11 ③	12 ⑤	13 ③	14 ①	15 ⑤
16 ②	17 ①	18 ⑤	19 ⑤	20 ③

변형유형 집중공략

p.134~135

1-1 34	1-2 ④	2-1 486	2-2 16
--------	-------	---------	--------

서술형 What & How

p.136~139

1 3	2 0	3 -8	4 -6
5 -1	6 0	7 15	8 2

실전 문제 | 1회

p.140~143

01 ③	02 ⑤	03 ⑤	04 ⑤	05 ②
06 ④	07 ④	08 ⑤	09 ②	10 ⑤
11 ③	12 ②	13 ②	14 ①	15 ③
16 ⑤	17 ③	18 8	19 8	

실전 문제 | 2회

p.144~147

01 ③	02 ②	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ③	08 ③	09 ②	10 ④
11 ④	12 ②	13 ④	14 ④	15 ③
16 ④	17 ④	18 32	19 44	

수능형 기출문제 & 변형문제

p.148~152

1 ①	2 ⑤	3 6	4 -20	5 ③
6 ②	7 ⑤	8 ②	9 ⑤	10 ③

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.154~157

01 ①	02 ②	03 ①	04 ②	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ④
11 ①	12 ④	13 ②	14 ③	15 ④
16 ④	17 -3	18 -8	19 9	20 18

실전 모의고사 2회

p.158~161

01 ②	02 ⑤	03 ③	04 ②	05 ④
06 ①	07 ④	08 ⑤	09 ③	10 ①
11 ④	12 ⑤	13 ③	14 ①	15 ①
16 ⑤	17 7	18 -2	19 50	20 -7

실전 모의고사 3회

p.162~165

01 ③	02 ①	03 ②	04 ⑤	05 ②
06 ②	07 ③	08 ①	09 ⑤	10 ④
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 ③	15 ②
16 ④	17 -1	18 11	19 -9	20 4

실전 모의고사 4회

p.166~169

01 ④	02 ⑤	03 ②	04 ①	05 ②
06 ③	07 ①	08 ④	09 ①	10 ③
11 ②	12 ③	13 ④	14 ②	15 ④
16 ②	17 2	18 -13	19 4	20 -4

실전 모의고사 5회

p.170~173

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ④	05 ⑤
06 ②	07 ①	08 ②	09 ④	10 ②
11 ④	12 ②	13 ③	14 ③	15 ②
16 ②	17 56	18 11	19 10	20 -11

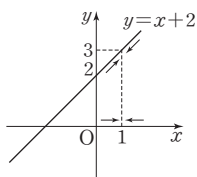
I 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한

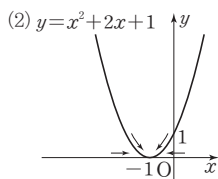
교과서 예제

p.7

01 (1)

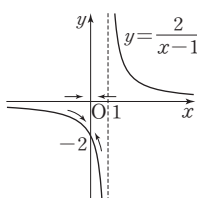


$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$



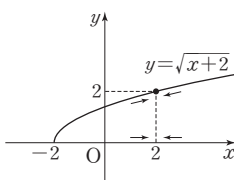
$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + 1) = 0$$

(3)



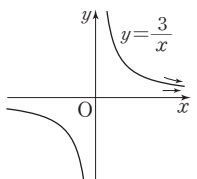
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x-1} = -2$$

(4)



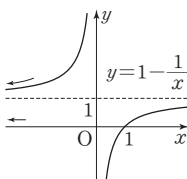
$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+2} = 0$$

(5)



$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0$$

(6)



$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

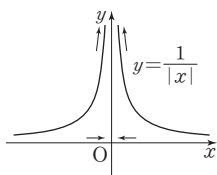
답 (1) 3 (2) 0 (3) -2 (4) 2 (5) 0 (6) 1

02 (1) $y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -\frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}$

따라서 함수 $y = \frac{1}{|x|}$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

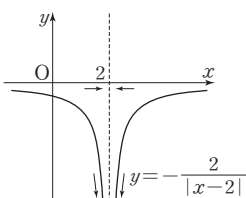


(2) $y = -\frac{2}{|x-2|} = \begin{cases} -\frac{2}{x-2} & (x > 2) \\ \frac{2}{x-2} & (x < 2) \end{cases}$

따라서 함수 $y = -\frac{2}{|x-2|}$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{2}{|x-2|}\right) = -\infty$$



답 (1) ∞ (2) $-\infty$

03

답 (1) 1 (2) 0 (3) 1

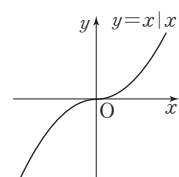
04 (1) $y = x|x| = \begin{cases} x \times x & (x \geq 0) \\ x \times (-x) & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$

따라서 함수 $y = x|x|$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x|x| = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} x|x| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x|x| = 0$$



(2) $y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & (x > 0) \\ -\frac{x}{x} & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$

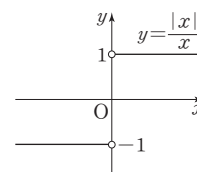
따라서 함수 $y = \frac{|x|}{x}$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 의 값은 존재하지 않는다.



답 (1) 0 (2) 존재하지 않는다.

05 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} 3f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \times 4 = 12$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 + (-2) = 2$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 - (-2) = 6$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 \times (-2) = -8$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{4}{-2} = -2$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5g(x)}{f(x)-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 5g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\}} = \frac{5 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} 2}$

$$= \frac{5 \times (-2)}{4 - 2} = -5$$

답 (1) 12 (2) 2 (3) 6 (4) -8 (5) -2 (6) -5

06 (1) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 5$

$$= 1 - 3 \times (-1) + 5 = 9$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x+3)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} x + \lim_{x \rightarrow -2} 3}{\lim_{x \rightarrow -2} x^2 + \lim_{x \rightarrow -2} x}$

$$= \frac{-2+3}{4+(-2)} = \frac{1}{2}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3} = 0 + 0 = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)\sqrt{6-x} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) \times \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6-x}$

$$= (\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3) \times \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6-x}$$

$$= (4 - 3) \times 2 = 2$$

답 (1) 9 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) 2

07 (1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+3}$
 $= \frac{-1-1}{-1+3} = \frac{-2}{2} = -1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1+1}{\sqrt{1+3}+2}$
 $= \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3-2x^2+4x+1}{2x^3+8x+9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{8}{x^2}+\frac{9}{x^3}} = \frac{6}{2} = 3$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8x}-x)$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+8x}-x)(\sqrt{x^2+8x}+x)}{\sqrt{x^2+8x}+x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+8x)-x^2}{\sqrt{x^2+8x}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1} = \frac{8}{1+1} = 4$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{2x+3-(x+3)}{(x+3)(2x+3)} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x}{(x+3)(2x+3)} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+3)(2x+3)}$
 $= \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$

답 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 3 (4) 4 (5) $\frac{1}{9}$

08 (1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+ax+b}{x+1} = 1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -1$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax+b) = 0$
 $1-a+b=0$
 $\therefore b=a-1$
따라서
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+ax+b}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+ax+a-1}{x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} (x+a-1) = a-2 = 1$
이므로 $a=3$
 $\therefore b=3-1=2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b} = 6$ 에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$
일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a}-b) = 0$
 $\sqrt{1+a}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{1+a}$
따라서
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-b}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{x+a-(1+a)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a}) = 2\sqrt{1+a} = 6$
이므로
 $\sqrt{1+a}=3, 1+a=9 \quad \therefore a=8$
 $\therefore b=\sqrt{1+8}=3$

답 (1) $a=3, b=2$ (2) $a=8, b=3$

09 $\frac{2x^2+x+1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{2x^2+3x+1}{x^2+1}$ 이고
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2,$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$
이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$

답 2

기출 Best | 1회

p.8~11

01 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$
ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1) = -1$
이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$
즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 의 값은 존재하지 않는다.
ㄷ. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1) = 1+1=2$
ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ 이고
 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{x-2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

$$02 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x+a) = -2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-1) = 2a-1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 이어야 하

므로

$$-2+a=2a-1 \quad \therefore a=-1$$

답 ②

$$03 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+3) = -1+3=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 1-1=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2+0=2$$

답 ③

$$04 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3x+2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \{-(x-1)\}$$

$$= -(2-1) = -1$$

답 ①

$$05 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$= -2+2+1=1$$

답 ④

$$06 \quad g(x)=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1-\text{일 때 } t \rightarrow 1-\text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $s=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(f(x)) = g(1) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow -1^+} g(f(x)) = 1+2=3$$

답 ④

$$07 \quad 2f(x)-g(x)=h(x) \text{로 놓으면 } g(x)=2f(x)-h(x)$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6f(x)+2g(x)}{2f(x)+g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6f(x)+2\{2f(x)-h(x)\}}{2f(x)+\{2f(x)-h(x)\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10f(x)-2h(x)}{4f(x)-h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{2h(x)}{f(x)}}{4 - \frac{h(x)}{f(x)}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

답 ③

$$\text{다른풀이} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \{2f(x)-g(x)\} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)-g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2 - \frac{g(x)}{f(x)} \right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6f(x)+2g(x)}{2f(x)+g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2g(x)}{f(x)}}{2 + \frac{g(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{6+2 \times 2}{2+2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$08 \quad \neg. [\text{반례}] \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases} \text{이}$$

면 $f(x)+g(x)=0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\}=0$ 이지만

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값과 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

$$\neg. \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+g(x)\} = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\} = \beta$$

(α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)+g(x)}{2} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-g(x)}{2}$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ (참)}$$

$$\neg. [\text{반례}] \quad f(x)=g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \text{이면 } f(x)-g(x)=0 \text{이}$$

므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-g(x)\}=0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값과

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

$$09 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)f(x)}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)f(x)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x+3}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)} = \frac{18}{3+3} = 3$$

답 ⑤

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+5}-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)(\sqrt{x+5}+2)$$

$$= (-1-1)(\sqrt{-1+5}+2)$$

$$= -8$$

답 ②

$$11 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{4x^2-x+1}-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}$$

$$= \frac{1+1}{2-1} = 2$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 12 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+7x} - \sqrt{x^2+6x}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+7x} - \sqrt{x^2+6x})(\sqrt{x^2+7x} + \sqrt{x^2+6x})}{\sqrt{x^2+7x} + \sqrt{x^2+6x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+7x) - (x^2+6x)}{\sqrt{x^2+7x} + \sqrt{x^2+6x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+7x} + \sqrt{x^2+6x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{7}{x}} + \sqrt{1+\frac{6}{x}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \times \frac{2-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{2(x-1)\sqrt{x+3}(2+\sqrt{x+3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x+3}(2+\sqrt{x+3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2\sqrt{x+3}(2+\sqrt{x+3})} \\
 &= \frac{-1}{2 \times 2 \times (2+2)} = -\frac{1}{16} \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad ① \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}} = \frac{3+0}{1-0} = 3 \\
 ② \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) \\
 &= 2-3 = -1
 \end{aligned}$$

③ $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t - \sqrt{t^2+1}}{-t+1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \sqrt{t^2+1}}{t-1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}} \\
 &= \frac{1+1}{1-0} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ④ \quad & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$⑤ \quad |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -(x^2-4) & (-2 < x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2+2x}{|x^2-4|} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2+2x}{-(x^2-4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x(x+2)}{-(x+2)(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x}{-(x-2)} \\
 &= \frac{-2}{-(-2-2)} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

참고 $x^2-4 \geq 0$ 에서 $(x+2)(x-2) \geq 0$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$x^2-4 < 0 \text{에서 } (x+2)(x-2) < 0 \quad \therefore -2 < x < 2$$

$$\therefore |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -(x^2-4) & (-2 < x < 2) \end{cases}$$

$$15 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5 \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b) = 0$$

$$4+2a+b=0 \quad \therefore b=-2a-4 \quad \dots\dots ⑦$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax-2a-4}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+a+2) = a+4=5
 \end{aligned}$$

이므로 $a=1$

$$a=1 \text{을 } ⑦ \text{에 대입하면 } b=-2 \times 1-4=-6$$

$$\therefore ab=1 \times (-6)=-6$$

답 ①

$$16 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}-b}{x-1} = 4 \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 1 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x}-b) = 0$$

$$a-b=0 \quad \therefore b=a \quad \dots\dots ⑧$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}-b}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}-a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{\sqrt{x}+1} = \frac{a}{2} = 4
 \end{aligned}$$

이므로 $a=8$

$$a=8 \text{을 } ⑧ \text{에 대입하면 } b=8$$

$$\therefore ab=8 \times 8=64$$

답 ⑤

$$17 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 2 \text{에서 다항함수 } f(x) \text{는 최고차항의 계수가 2인 이}$$

차함수이다. 즉,

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\text{한편, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = -1 \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 1 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + ax + b) = 0$$

$$2+a+b=0 \quad \therefore b=-a-2 \quad \dots\dots ⑨$$

⑦

따라서 $f(x) = 2x^2 + ax - a - 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + ax - a - 2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+a+2)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+a+2}{x+1} \\ &= \frac{a+4}{2} = -1\end{aligned}$$

$$a+4 = -2 \quad \therefore a = -6$$

$$a = -6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = 6 - 2 = 4$$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ 이므로

$$f(-1) = 2 + 6 + 4 = 12$$

답 ②

18 $x > -\frac{1}{4}$ 일 때 $0 < 4x+1 < f(x) < 4x+3$ 이므로

$$16x^2 + 8x + 1 < \{f(x)\}^2 < 16x^2 + 24x + 9$$

모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 1 > 0$ 이므로

$$\frac{16x^2 + 8x + 1}{2x^2 + 1} < \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2 + 1} < \frac{16x^2 + 24x + 9}{2x^2 + 1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^2 + 8x + 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{16}{2} = 8,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^2 + 24x + 9}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16 + \frac{24}{x} + \frac{9}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{16}{2} = 8$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2 + 1} = 8$$

답 ⑤

19 함수 $y = |x^2 - 1|$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$$t < 0 \text{일 때, } f(t) = 0$$

$$t = 0 \text{일 때, } f(t) = 2$$

$$0 < t < 1 \text{일 때, } f(t) = 4$$

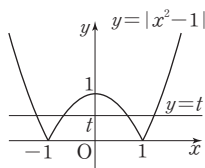
$$t = 1 \text{일 때, } f(t) = 3$$

$$t > 1 \text{일 때, } f(t) = 2$$

$$\text{따라서 } f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0 \text{ 또는 } t > 1) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 3 & (t = 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 4$$

답 ⑤



20 $\overline{OQ} = \overline{OP} = \sqrt{t^2 + (\sqrt{2t})^2} = \sqrt{t^2 + 2t}$ 이므로

$$Q(0, \sqrt{t^2 + 2t})$$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$y - \sqrt{t^2 + 2t} = \frac{\sqrt{2t} - \sqrt{t^2 + 2t}}{t - 0}(x - 0)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2t} - \sqrt{t^2 + 2t}}{t}x + \sqrt{t^2 + 2t}$$

직선 PQ와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$0 = \frac{\sqrt{2t} - \sqrt{t^2 + 2t}}{t}x + \sqrt{t^2 + 2t}$$

$$\frac{\sqrt{t^2 + 2t} - \sqrt{2t}}{t}x = \sqrt{t^2 + 2t}$$

$$\therefore x = \frac{t\sqrt{t^2 + 2t}}{\sqrt{t^2 + 2t} - \sqrt{2t}} = \frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t+2} - \sqrt{2}} \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore f(t) = \frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t+2} - \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t+2} - \sqrt{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\sqrt{t+2}(\sqrt{t+2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{t+2} - \sqrt{2})(\sqrt{t+2} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\sqrt{t+2}(\sqrt{t+2} + \sqrt{2})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t+2}(\sqrt{t+2} + \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 4\end{aligned}$$

답 ③

기출 Best | 2회

p.12~15

01 $\neg. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5x-1} = \sqrt{5-1} = 2$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1|}{x+1} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x+1}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1}$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - 2) = \infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - 2)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\text{ㄹ. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

02 $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (x+a)^2 = (6+a)^2$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (x-a) = 6-a$$

$\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ 이어야 하므로

$$(6+a)^2 = 6-a, \quad 36+12a+a^2 = 6-a, \quad a^2+13a+30=0$$

$$(a+10)(a+3)=0 \quad \therefore a=-10 \text{ 또는 } a=-3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-10 + (-3) = -13$$

답 ①

03 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x+4) = -2+4=2,$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-2) = 3-2=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2+1=3$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 04 \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1-x^2}{|1-x|} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(1+x)(1-x)}{-(1-x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1+} \{-(1+x)\} \\
 &= -(1+1) = -2
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 05 \quad \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= 1, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 \text{ 이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= 1 + (-2) + 1 = 0
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 06 \quad f(f(2)) &= f(1) = 0 \\
 \text{한편 } f(x) &= t \text{ 로 놓으면} \\
 x \rightarrow 1- \text{ 일 때 } t &\rightarrow 1+, x \rightarrow 2+ \text{ 일 때 } t = 3 \text{ 이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 1, \\
 \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) &= f(3) = 2 \\
 \therefore f(f(2)) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) &= 0 + 1 + 2 = 3
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 07 \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x^2 - 1)(x+2)f(x)}{x+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(x) \\
 &= \frac{11}{4} \times 2 = \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 08 \quad \neg. [\text{반례}] f(x) &= \frac{1}{x^2}, g(x) = x \text{ 이면} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \times x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0
 \end{aligned}$$

이지만

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

∴ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ (a, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a\beta \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

∴ [반례] $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = \frac{1}{x^4}$ 이면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \\
 \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty \text{ 이지만} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ 이다. (거짓)}
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ∴ 이다.

답 ②

$$\begin{aligned}
 09 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x - 3}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 3)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x - 3) \\
 &= 1 + 1 - 3 = -1
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 10 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x+8}}{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x+8})(\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x+8})(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3})}{(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3})(\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x+8})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+8 - (x+8))(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3})}{(x^2+3 - (x+3))(\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x+8})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+8} + \sqrt{x+8}} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{4}}{\sqrt{9} + \sqrt{9}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 11 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 + 8x^2}{\{f(x)\}^2 + 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\{f(x)\}^2}{x^2} + 8}{\frac{\{f(x)\}^2}{x^2} + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}^2 + 8}{\left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}^2 + 2} = \frac{1^2 + 8}{1^2 + 2} = 3
 \end{aligned}$$

답 ⑤

12 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 5x + 2} + 2x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2 + 5t + 2} - 2t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2 + 5t + 2} - 2t)(\sqrt{4t^2 + 5t + 2} + 2t)}{\sqrt{4t^2 + 5t + 2} + 2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(4t^2 + 5t + 2) - 4t^2}{\sqrt{4t^2 + 5t + 2} + 2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5t + 2}{\sqrt{4t^2 + 5t + 2} + 2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{t}}{\sqrt{4 + \frac{5}{t} + \frac{2}{t^2}} + 2} \\
 &= \frac{5}{2+2} = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 13 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{2x^2 - x - 1}{2(x+1)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2(x+1)} \\
 &= \frac{2+1}{2 \times (1+1)} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

답 ④

14 ① $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = -2-1 = -3$

② $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (-1) = -1$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{2x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x})$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+2x) - (x^2+x)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
 $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -1-} \left\{ -\frac{1}{|x+1|} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1-} \left\{ -\frac{1}{-(x+1)} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{x+1} = -\infty$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

15 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2+ax+b} = \frac{3}{4}$ 에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$

일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+ax+b) = 0$$

$$9+3a+b=0 \quad \therefore b = -3a-9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2+ax+b} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2+ax-3a-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+a+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+a+3}$$

$$= \frac{6}{a+6} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이므로 } 3a+18=24, 3a=6 \quad \therefore a=2$$

$a=2$ 를 ①에 대입하면

$$b = -3 \times 2 - 9 = -15$$

$$\therefore a+b = 2 + (-15) = -13$$

답 ③

16 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x+5}+b}{x-4} = \frac{1}{6}$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 4$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 4} (a\sqrt{x+5}+b) = 0$$

$$3a+b=0 \quad \therefore b = -3a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x+5}+b}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x+5}-3a}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a(\sqrt{x+5}-3)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\{(x+5)-9\}}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{a}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a=1$$

$$a=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -3 \times 1 = -3$$

$$\therefore a-b = 1 - (-3) = 4$$

답 ④

17 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2} = 1$ 에서 다항함수 $f(x)-2x^3$ 은 이차항의 계수

가 1인 이차함수이다.

$$f(x)-2x^3 = x^2+ax+b \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$$

$$\text{한편, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3 \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 0 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + x^2 + ax + b) = 0$$

$$\therefore b=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + x^2 + ax}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + x + a)$$

$$= a = -3$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$ 이므로

$$f(2) = 16 + 4 - 6 = 14$$

답 ③

18 $x > \frac{2}{3}$ 일 때 $0 < 3x-2 < f(x) < 3x+2$ 이므로

$$9x^2-12x+4 < \{f(x)\}^2 < 9x^2+12x+4$$

$$\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{9x^2-12x+4}{x^2+x+2} < \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+2} < \frac{9x^2+12x+4}{x^2+x+2}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2-12x+4}{x^2+x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+12x+4}{x^2+x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 9$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+2} = 9$$

답 ④

19 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=3x+t$,

즉 $3x-y+t=0$ 이 중심이 점

$(1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인

원에 접할 때, 직선 $3x-y+t=0$ 과

점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 원의 반지

름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같으므로

$$\frac{|3-3+t|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$$|t|=10$$

$$\therefore t=\pm 10$$

직선과 원이 서로 다른 두 점에서 만날 때

$$\frac{|3-3+t|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}<\sqrt{10}$$

$$|t|<10$$

$$\therefore -10< t < 10$$

직선과 원이 만나지 않을 때

$$\frac{|3-3+t|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}>\sqrt{10}$$

$$|t|>10$$

$$\therefore t<-10 \text{ 또는 } t>10$$

따라서

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<-10 \text{ 또는 } t>10) \\ 1 & (t=-10 \text{ 또는 } t=10) \\ 2 & (-10<t<10) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow -10^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow -10^+} f(t) = 2 + 2 = 4$$

답 ⑤

20 $A(k, 3\sqrt{k})$, $B(k, \sqrt{k})$, $C(k, 0)$ 이므로

$$\overline{OA}=\sqrt{k^2+(3\sqrt{k})^2}=\sqrt{k^2+9k}, \overline{AC}=3\sqrt{k},$$

$$\overline{OB}=\sqrt{k^2+(\sqrt{k})^2}=\sqrt{k^2+k}, \overline{BC}=\sqrt{k}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\overline{OB}-\overline{BC}}{\overline{OA}-\overline{AC}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{k+1}-1}{\sqrt{k+9}-3} \quad (\because k>0)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{k+1}-1)(\sqrt{k+1}+1)(\sqrt{k+9}+3)}{(\sqrt{k+9}-3)(\sqrt{k+9}+3)(\sqrt{k+1}+1)}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k(\sqrt{k+9}+3)}{k(\sqrt{k+1}+1)}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{k+9}+3}{\sqrt{k+1}+1}$$

$$= \frac{3+3}{1+1}=3$$

답 ①

변형유형 집중공략

p.16~19

1-1 $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{-t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{t} = k$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{t} = -k$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2f(-t)}{\sqrt{f(-t)+t^2}+f(-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2f(-t)}{\sqrt{\frac{f(-t)}{t^2}+1}+\frac{f(-t)}{t}} \\ &= \frac{-2k}{1-k}=4 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } -2k=4-4k, 2k=4 \quad \therefore k=2$$

답 2

1-2 $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x)-x\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{f(-t)+t\} = 5 \text{에서}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(-t)+t}{t} \right\} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(-t)}{t} + 1 \right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{t} = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+\{f(x)\}^2}{2x^2-f(x)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2+\{f(-t)\}^2}{2t^2-f(-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+\left\{\frac{f(-t)}{t}\right\}^2}{2-\frac{f(-t)}{t^2}} = \frac{1+1}{2-0}=1 \end{aligned}$$

답 ④

2-1 조건 (가)의

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{(x-2)(x+c)} = 0$$

에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)(x^2+ax+b) = 0$$

$$(2-1)(4+2a+b) = 0 \quad \therefore b = -2a-4$$

따라서

$$f(x) = (x-1)(x^2+ax-2a-4)$$

$$= (x-1)(x-2)(x+a+2)$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+c)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+a+2)}{x+c} \\ &= \frac{(2-1) \times (2+a+2)}{2+c} \quad (\because c \neq -2) \end{aligned}$$

$$= \frac{4+a}{2+c} = 0$$

$$4+a=0 \quad \therefore a=-4$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)^2$$

따라서 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)(x+c)}{(x-1)(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+c}{(x-1)(x-2)} = \frac{c}{-1 \times (-2)} \\ &= \frac{c}{2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\therefore c = -3$

따라서 $g(x) = (x-2)(x-3)$ 이므로

$$g(4) = 2 \times 1 = 2$$

답 2

2-2 조건 (가)에서 $g(-1) = 0$ 이고, 이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = (x+1)(x+k) \quad (k \text{는 상수})$$

라 하면 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{(x+1)(x+k)} = -1$$

이므로 다항함수 $f(x) - 2x^3$ 은 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수이다. 즉,

$$f(x) - 2x^3 = -x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$$

조건 (가)에서 $f(0) = -4$ 이므로 $b = -4$

$$\text{즉, } f(x) = 2x^3 - x^2 + ax - 4$$

따라서 조건 (다)에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+k)}{2x^3 - x^2 + ax - 4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - x^2 + ax - 4) = 0$$

$$-2 - 1 - a - 4 = 0 \quad \therefore a = -7$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 4$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+k)}{2x^3 - x^2 - 7x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+k)}{(x+1)(2x^2 - 3x - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+k}{2x^2 - 3x - 4} \\ &= \frac{-1+k}{2+3-4} = -1+k=1\end{aligned}$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore g(x) = (x+1)(x+2)$$

따라서 $g(1) = 2 \times 3 = 6$, $f(1) = 2 - 1 - 7 - 4 = -10$ 이므로

$$g(1) - f(1) = 6 - (-10) = 16$$

답 16

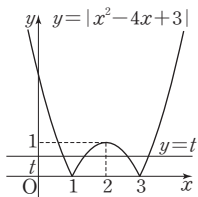
3-1 함수 $y = |x^2 - 4x + 3|$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 직선 $y = t$ 와 함수

$y = |x^2 - 4x + 3|$ 의 그래프의 교점은

$t < 0$ 일 때, 0개 $\therefore f(t) = 0$

$t = 0$ 일 때, 2개 $\therefore f(t) = 2$



$0 < t < 1$ 일 때, 4개 $\therefore f(t) = 4$

$t = 1$ 일 때, 3개 $\therefore f(t) = 3$

$t > 1$ 일 때, 2개 $\therefore f(t) = 2$

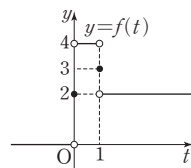
$$\therefore f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0 \text{ 또는 } t > 1) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 3 & (t = 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

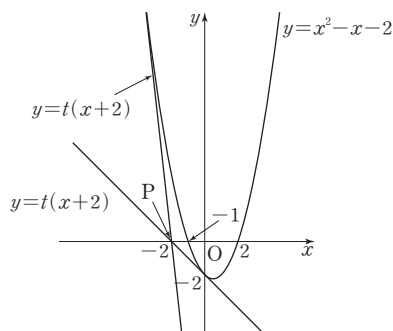
$\lim_{t \rightarrow a+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 인 실수 a 는

0, 1의 2개이다.



답 ②

3-2



점 $P(-2, 0)$ 을 지나고 기울기가 t 인 직선의 방정식은

$$y = t(x+2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 함수 $y = x^2 - x - 2$ 의 그래프에 접하는 경우는 이차방

정식 $x^2 - x - 2 = t(x+2)$ 가 중근을 가질 때이므로

$x^2 - (t+1)x - 2 - 2t = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(t+1)\}^2 - 4 \times 1 \times (-2-2t) = 0$$

$$t^2 + 10t + 9 = 0, (t+9)(t+1) = 0$$

$$\therefore t = -9 \text{ 또는 } t = -1$$

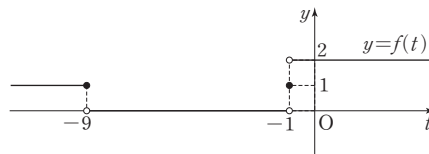
따라서 직선 ①과 함수 $y = x^2 - x - 2$ 의 그래프의 교점은

$t \leq -9$ 일 때, 1개 $\therefore f(t) = 1$

$-9 < t < -1$ 일 때, 0개 $\therefore f(t) = 0$

$t = -1$ 일 때, 1개 $\therefore f(t) = 1$

$t > -1$ 일 때, 2개 $\therefore f(t) = 2$



따라서 $\lim_{t \rightarrow a+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 인 실수 a 는 $-9, -1$ 이므로 모든

실수 a 의 값의 합은

$$-9 + (-1) = -10$$

답 -10

4-1 $B(t, \frac{1}{t})$, $C(t, t^2)$ 이고, 점 D 의 y 좌표가 t^2 이므로 점 D 의 x 좌

$$\text{표는 } t^2 = \frac{1}{x} \text{에서 } x = \frac{1}{t^2} \quad \therefore D\left(\frac{1}{t^2}, t^2\right)$$

$$f(t) = \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times (\text{점 } A \text{와 } \overline{BC} \text{ 사이의 거리})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) \times (t-1) = \frac{(t^3-1)(t-1)}{2t}, \\
g(t) &= \triangle ACD = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times (\text{점 A와 } \overline{CD} \text{ 사이의 거리}) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(t - \frac{1}{t^2}\right) \times (t^2-1) = \frac{(t^3-1)(t^2-1)}{2t^2} \\
\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{g(t)}{f(t)} &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\frac{(t^3-1)(t^2-1)}{2t^2}}{\frac{(t^3-1)(t-1)}{2t}} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t^2-1}{t(t-1)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t+1)(t-1)}{t(t-1)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t+1}{t} = \frac{1+1}{1} = 2
\end{aligned}$$

답 2

4-2 B($t, \frac{1}{t}$), C($t, \sqrt{t}$), D(t, t^2)이고 점 E의 y좌표가 t^2 이므로

$$\begin{aligned}
t^2 &= \frac{1}{x} \text{에서 } x = \frac{1}{t^2} \quad \therefore E\left(\frac{1}{t^2}, t^2\right) \\
f(t) &= \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times (\text{점 A와 } \overline{BC} \text{ 사이의 거리}) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{t} - \frac{1}{t}\right) \times (t-1) = \frac{(t\sqrt{t}-1)(t-1)}{2t} \\
g(t) &= \triangle ADE = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times (\text{점 A와 } \overline{DE} \text{ 사이의 거리}) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(t - \frac{1}{t^2}\right) \times (t^2-1) = \frac{(t^3-1)(t^2-1)}{2t^2} \\
\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{g(t)}{f(t)} &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\frac{(t^3-1)(t^2-1)}{2t^2}}{\frac{(t\sqrt{t}-1)(t-1)}{2t}} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t^3-1)(t^2-1)}{t(t\sqrt{t}-1)(t-1)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t^3-1)(t^2-1)}{t\{(\sqrt{t})^3-1\}(t-1)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\{(\sqrt{t})^3+1\}\{(\sqrt{t})^3-1\}(t+1)(t-1)}{t\{(\sqrt{t})^3-1\}(t-1)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\{(\sqrt{t})^3+1\}(t+1)}{t} \\
&= \frac{(1+1) \times (1+1)}{1} = 4
\end{aligned}$$

답 4

서술형 What & How

p.20~23

1 $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{-3t+1}{-t-1}\right) \quad \dots\dots ① \\
\frac{-3t+1}{-t-1} &= u, \text{ 즉} \\
u &= \frac{3t-1}{t+1} = \frac{3(t+1)-4}{t+1} = -\frac{4}{t+1} + 3
\end{aligned}$$

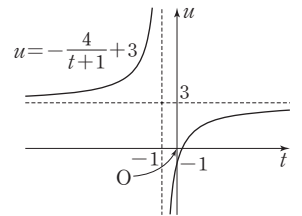
으로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $u \rightarrow 3-$ 이므로 $\dots\dots ②$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{-3t+1}{-t-1}\right) = \lim_{u \rightarrow 3-} f(u) = 2 \quad \dots\dots ③$$

답 2

참고 $u = -\frac{4}{t+1} + 3$ 의 그래프

프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $u \rightarrow 3-$ 이다.



2 $\frac{x+4}{x+3} = t$ 로 놓으면 $t = \frac{(x+3)+1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 1$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x+4}{x+3}\right) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 1 \quad \dots\dots ①$$

$\frac{4x}{x+1} = s$ 로 놓으면

$$s = \frac{4(x+1)-4}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 4$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $s \rightarrow 4-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{4x}{x+1}\right) = \lim_{s \rightarrow 4-} f(s) = 2 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x+4}{x+3}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{4x}{x+1}\right) = 1 + 2 = 3 \quad \dots\dots ③$$

답 3

채점기준	배점
① $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x+4}{x+3}\right)$ 의 값 구하기	2
② $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{4x}{x+1}\right)$ 의 값 구하기	2
③ $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x+4}{x+3}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{4x}{x+1}\right)$ 의 값 구하기	1

3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{ax+b} = \frac{2}{3}$ 에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일

때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax+b) = 0$$

$$2a+b=0 \quad \therefore b=-2a \quad \dots\dots ⑦ \quad \dots\dots ①$$

따라서

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{ax+b} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{ax-2a} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{a(x-2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{a(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{a(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{a(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{a(\sqrt{x^2+5}+3)} \\
&= \frac{2+2}{a(3+3)} = \frac{2}{3a} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

이므로 $a=1$

$$a=1을 \textcircled{1}에 대입하면 b=-2 \times 1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a-b=1-(-2)=3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 3

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+2}-2}{x-1} = b \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 1 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{ax+2}-2) = 0, \sqrt{a+2}-2=0, \sqrt{a+2}=2$$

$$a+2=4 \quad \therefore a=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+2}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+2}-2)(\sqrt{2x+2}+2)}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{2x+2}+2}$$

$$= \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 1

채점기준	배점
① a의 값 구하기	2
② b의 값 구하기	2
③ ab의 값 구하기	1

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+3} = 3 \text{에서 다항함수 } f(x) \text{는 최고차항의 계수가 3}$$

인 이차함수이다. $\dots\dots \textcircled{1}$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x^2-3x-4} = 2 \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 4 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$$

$$\therefore f(4) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 다항함수}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$f(x) = 3(x-4)(x+a) \quad (a \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x^2-3x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x-4)(x+a)}{(x+1)(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x+a)}{x+1}$$

$$= \frac{3(4+a)}{5} = 2$$

$$\text{이므로 } 3(4+a) = 10$$

$$4+a = \frac{10}{3} \quad \therefore a = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3(x-4)\left(x-\frac{2}{3}\right) = (3x-2)(x-4) \text{이므로}$$

$$f(2) = 4 \times (-2) = -8 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 -8

$$6 \quad \text{조건 (가)의 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^2}{x} = 2 \text{에서 다항함수 } f(x)-x^2 \text{은 최고}$$

차항의 계수가 2인 일차함수이다. 즉,

$$f(x)-x^2 = 2x+a \quad (a \text{는 상수})$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{한편, 조건 (나)의 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = m \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 1$$

일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + a) = 0$$

$$1+2+a=0 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+3)$$

$$= 1+3=4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 4

채점기준	배점
① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^2}{x} = 2$ 에서 함수 $f(x)$ 유추하기	2
② $f(x)$ 구하기	3
③ m 의 값 구하기	2

$$7 \quad \overline{OQ} = \overline{OP} = \sqrt{t^2 + (t^2)^2} = t\sqrt{t^2+1} \text{이므로}$$

$$Q(t\sqrt{t^2+1}, 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$y-t^2 = \frac{t^2-0}{t-t\sqrt{t^2+1}}(x-t)$$

$$\therefore y = \frac{t}{1-\sqrt{t^2+1}}(x-t) + t^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

점 R(0, f(t))가 직선 PQ 위의 점이므로

$$f(t) = \frac{t}{1-\sqrt{t^2+1}}(0-t) + t^2$$

$$= \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}-1} + t^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}-1} + t^2 \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{t^2(\sqrt{t^2+1}+1)}{(\sqrt{t^2+1}-1)(\sqrt{t^2+1}+1)} + t^2 \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{t^2(\sqrt{t^2+1}+1)}{(t^2+1)-1} + t^2 \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{t^2(\sqrt{t^2+1}+1)}{t^2} + t^2 \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} (\sqrt{t^2+1} + 1 + t^2)$$

$$= 1+1+0=2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 2

$$8 \quad \overline{OP} = \sqrt{t^2 + (\sqrt{t})^2} = \sqrt{t^2+t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 직선 OP의 기울기는 $\frac{\sqrt{t}-0}{t-0} = \frac{\sqrt{t}}{t}$ 이므로 이 직선에 수직인

직선의 기울기는

$$-\frac{t}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t}$$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$y - \sqrt{t} = -\sqrt{t}(x - t)$$

$$\therefore y = -\sqrt{t}(x - t) + \sqrt{t}$$

..... ②

이 직선의 x절편은

$$0 = -\sqrt{t}(x - t) + \sqrt{t}$$

$$0 = -(x - t) + 1, x - t = 1$$

$$\therefore x = t + 1$$

따라서 Q(t+1, 0)이므로 $\overline{OQ} = t + 1$

..... ③

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\overline{OQ} - \overline{OP}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t + 1 - \sqrt{t^2 + t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + 1 + \sqrt{t^2 + t}}{(t + 1 - \sqrt{t^2 + t})(t + 1 + \sqrt{t^2 + t})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + 1 + \sqrt{t^2 + t}}{(t + 1)^2 - (t^2 + t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + 1 + \sqrt{t^2 + t}}{t + 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t}}}{1 + \frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2$$

..... ④

답 2

채점기준	배점
① OP를 t에 대한 식으로 나타내기	1
② 직선 PQ의 방정식 구하기	2
③ OQ를 t에 대한 식으로 나타내기	1
④ $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\overline{OQ} - \overline{OP}}$ 의 값 구하기	3

실전 문제 | 1회

p.24~27

01 ① $\lim_{x \rightarrow -3} (x + 3) = -3 + 3 = 0$

② $\lim_{x \rightarrow 0+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

③ $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x-2} = \infty, \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ 의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{2x+1} + 3) = \sqrt{2 \times 4 + 1} + 3 = 3 + 3 = 6$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ③이다.

답 ③

02 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} a = a$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + x - 2}{|x - 1|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x+2)\}$$

$$= -(1+2) = -3$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이어야 하

므로

$$a = -3$$

답 ①

03 $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) \times f(x)\}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 \times 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 5$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)\}^2 + \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 1 + 5 = 6$$

답 ③

04 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{이}$$

므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $f(x) = t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

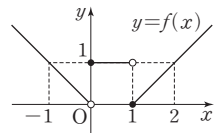
$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $f(x) = t$ 라 하면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) = f(1) = 0 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤



05 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5f(x)}{2x + f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \frac{5f(x)}{x}}{2 + \frac{f(x)}{x}}$

$$= \frac{0 - 15}{2 + 3} = -3$$

답 ②

06 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f(0)=0, f(5)=0$ 이므로

$f(x) = ax(x-5)$ ($a > 0$)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x-6)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} a(x-6)$$

$$= -5a = -10$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = 2x(x-5)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x(x-5)}{x-5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} 2x = 2 \times 5 = 10$$

답 ⑤

07 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \{f(x) - x^2\} = 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} - 1 \right\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6f(x) - x}{3f(x) + 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6f(x)}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{3f(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{6 \times 1 - 0}{3 \times 1 + 0 - 0} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

08 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x} - x)(\sqrt{x^2 + 6x} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 6x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 6x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{x}} + 1} = \frac{6}{1 + 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3x+1} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1 - (3x+1)}{3x+1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{-3x}{3x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{3x+1} = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3 \times (-3) = -9$$

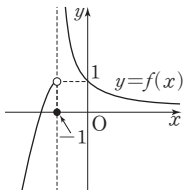
답 ①

09 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③



10 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(x)=f(-x)$

$-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) + f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow -1} \{f(-x) + f(-x)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} 2f(-x) = 2 \lim_{x \rightarrow -1} f(-x)$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 2 \times 1 = 2$$

답 ⑤

11 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + 4x - 3} - \sqrt{x^2 + a})$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{ax^2 + 4x - 3} - \sqrt{x^2 + a})(\sqrt{ax^2 + 4x - 3} + \sqrt{x^2 + a})}{\sqrt{ax^2 + 4x - 3} + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax^2 + 4x - 3) - (x^2 + a)}{\sqrt{ax^2 + 4x - 3} + \sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-1)x^2 + 4x - 3 - a}{\sqrt{ax^2 + 4x - 3} + \sqrt{x^2 + a}}$$

..... ⑦

⑦의 값이 존재하려면

$$a-1=0 \quad \therefore a=1$$

$a=1$ 을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-4}{\sqrt{x^2+4x-3}+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

답 ④

참고 $a \neq 1$ 인 양수 a 에 대하여 ⑦은 $0 < a < 1$ 일 때 $-\infty$ 로, $a > 1$ 일 때 ∞ 로 발산한다.

12 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$ 이므로 다항함수 $f(x)$ 는 이차 이하의 함수이다.

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로

$$f(x) = ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) = b = 5$$

$$\therefore f(x) = ax^2 + 5x$$

방정식 $f(x) = x$, 즉 $ax^2 + 5x = x$ 의 한 근이 -2 이므로

$$4a - 10 = -2, \quad 4a = 8$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 5x$ 이므로

$$f(1) = 2 + 5 = 7$$

답 ②

13 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x-1} = -3$ 에서 극한값이 존재하고

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + b) = 0, \quad 1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1$$

..... ⑦

따라서 $f(x) = x^3 + ax^2 - a - 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 - a - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{x^2 + (a+1)x + (a+1)\}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \{x^2 + (a+1)x + (a+1)\}$$

$$= 1 + (a+1) + (a+1)$$

$$= 2a + 3 = -3$$

$$2a = -6 \quad \therefore a = -3$$

이것을 ⑦에 대입하면

$$b = -(-3) - 1 = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 이므로

$$f(3) = 27 - 27 + 2 = 2$$

답 ②

14 $x > 0$ 일 때, $\frac{x^2-x}{3x+5} \leq f(x) \leq \frac{x^2+x}{3x+1}$ 에서

$$\frac{(2x)^2-2x}{3 \times 2x+5} \leq f(2x) \leq \frac{(2x)^2+2x}{3 \times 2x+1}$$

$$\frac{4x-2}{6x+5} \leq \frac{f(2x)}{x} \leq \frac{4x+2}{6x+1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-2}{6x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{2}{x}}{6+\frac{5}{x}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+2}{6x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{2}{x}}{6+\frac{1}{x}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)}{x} = \frac{2}{3}$$

답 ②

15 $A(t, \sqrt{t}), B(t+4, \sqrt{t+4}), C(t+4, \sqrt{t})$ 이므로

$$\overline{AC}=4, \overline{BC}=\sqrt{t+4}-\sqrt{t}$$

따라서 삼각형 ACB의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4 \times (\sqrt{t+4}-\sqrt{t})$$

$$= 2(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times S(t)}{2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} \times 2(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t}(\sqrt{t+4}-\sqrt{t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})(\sqrt{t+4}+\sqrt{t})}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+1} = \frac{4}{1+1} = 2$$

답 ④

16 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \beta$ (a, β 는 실수)이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = 2 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \quad \therefore a + \beta = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = -8 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -8 \quad \therefore a\beta = -8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -2, \beta = 4 \text{ 또는 } a = 4, \beta = -2$$

$$a < \beta \text{이므로 } a = -2, \beta = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + 5g(x)}{-2f(x) + g(x)} &= \frac{2a + 5\beta}{-2a + \beta} \\ &= \frac{2 \times (-2) + 5 \times 4}{-2 \times (-2) + 4} = \frac{16}{8} = 2 \end{aligned}$$

답 ④

참고 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \beta$ (a, β 는 실수)일 때에만

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a + \beta,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a\beta$$

가 성립한다.

17 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 10$ 에서 극한값이 존재하고

$x \rightarrow 1, x \rightarrow -1$ 일 때 각각 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$f(1) = 0, f(-1) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 다항함수})$$

함수 $f(x)$ 가 삼차함수이므로

$$f(x) = (x-1)(x+1)(ax+b) \quad (a, b \text{는 상수, } a \neq 0)$$

$$\text{로 놓으면 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 10 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(ax+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(ax+b) = 2(a+b) = 10 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 10 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(ax+b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)(ax+b) = -2(-a+b) = 10 \end{aligned}$$

$$\therefore a-b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=5, b=0$$

따라서 $f(x) = 5x(x-1)(x+1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2-x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 5(x+1) = 5 \end{aligned}$$

답 ③

18 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{1-x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}f(t) - 1}{1-\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) - t}{t-1} = 2 \end{aligned}$$

즉, $f(x) - x$ 는 최고차항의 계수가 2인 일차함수이므로

$$f(x) - x = 2x + k \quad (k \text{는 상수})$$

$$\therefore f(x) = 3x + k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-x-2} = a \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x+k) = 0$$

$$6+k=0 \quad \therefore k=-6$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x-6 \text{이므로} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{2+1} = 1 \end{aligned}$$

..... ③

답 1

채점기준	배점
① $\frac{1}{x}=t$ 로 치환하여 $f(x)$ 유추하기	2
② $f(x)$ 구하기	2
③ a 의 값 구하기	1

- 19 점 $P(t, t+1)$ 을 지나고 직선 $y=x+1$ 에 수직인 직선의 방정식은 $y-(t+1)=-(x-t)$

$$\therefore y=-x+2t+1 \quad \dots\dots ①$$

이 직선의 y 절편은 $2t+1$ 이므로

$$Q(0, 2t+1) \quad \dots\dots ②$$

따라서

$$\overline{AP}^2 = \{t - (-1)\}^2 + \{(t+1) - 0\}^2 \\ = 2t^2 + 4t + 2$$

$$\overline{AQ}^2 = \{0 - (-1)\}^2 + \{(2t+1) - 0\}^2 \\ = 4t^2 + 4t + 2 \quad \dots\dots ③$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t + 2}{2t^2 + 4t + 2} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}}{2 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}} \\ = \frac{4}{2} = 2 \quad \dots\dots ④$$

답 2

채점기준	배점
① 점 P 를 지나고 직선 $y=x+1$ 에 수직인 직선의 방정식 구하기	1
② 점 Q 의 좌표를 t 에 대한 식으로 나타내기	1
③ $\overline{AP}^2, \overline{AQ}^2$ 을 t 에 대한 식으로 나타내기	2
④ $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$ 의 값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.28~31

- 01 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=2$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=1, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=1$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)=2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=0$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)=1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)=0$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 인 실수 a 는 $-2, -1, 1, 2$ 의 4개이다.

답 ④

- 02 $g(x+a)=(x+a-1)(x+a-2)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x+a) = \lim_{x \rightarrow a+} (-x+1)(x+a-1)(x+a-2) \\ = (-a+1)(2a-1)(2a-2)$$

$$= -2(2a-1)(a-1)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x+a) = \lim_{x \rightarrow a-} (x+a)(x+a-1)(x+a-2)$$

$$= 2a(2a-1)(2a-2)$$

$$= 4a(a-1)(2a-1)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x+a)$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x+a) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x+a) \text{ 이어야 하므로}$$

$$-2(2a-1)(a-1)^2 = 4a(a-1)(2a-1)$$

$$4a(a-1)(2a-1) + 2(2a-1)(a-1)^2 = 0$$

$$2(a-1)(2a-1)\{2a+(a-1)\} = 0$$

$$2(a-1)(2a-1)(3a-1) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=\frac{1}{3}$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

답 ②

- 03 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=2$ 이고 $x-1=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-, x \rightarrow 4+$ 일 때 $t \rightarrow 3+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 3+} f(t) = 1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow 4+} f(x-1)$$

$$= 2 + 2 + 1 = 5$$

답 ④

- 04 $\neg. \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

$$= -1 \times 1 = -1 \text{ (참)}$$

$\cup. f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = -2$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x))$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

$\cap. g(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow -2+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{s \rightarrow -2+} f(s) = -1$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $s = -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = f(-2) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = -1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \cap$ 이다.

답 ③

05 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 이차방정식 $f(x)=6x-8$, 즉 $f(x)-6x+8=0$ 의 두 실근이 2, 3이므로

$$f(x)-6x+8=(x-2)(x-3)$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x-3)+6x-8$$

$$=x^2-5x+6+6x-8$$

$$=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

따라서 $f(x+1)=x(x+3)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x+1)}{x^2+4x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x+1} = \frac{-3}{-3+1} = \frac{3}{2}$$

답 ②

06 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-g(x)\}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$

$$= 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$= 0 \times (-1) = 0$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$

$\cap$. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} = \infty$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-1}{f(x)} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{-1}{t} = \infty$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$\cap$. $\lim_{x \rightarrow 1+} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2] = 0^2 + 1^2 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2] = 0^2 + (-1)^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2] = 1$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 $\neg$, $\cap$ 이다.

답 ③

07 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{(\sqrt{x}-2)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)f(x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{f(x)} = 2$$

$\frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{f(x)} = g(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 2$ 이고

$f(x) = \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{g(x)}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{g(x)}$$

$$= \frac{8 \times 4}{2} = 16$$

답 ⑤

다른풀이 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x+4)(\sqrt{x}+2)}{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{f(x)}} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$$

08 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{4x^2+3x+1}+ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+a}$

$$= \frac{1+1}{2+a} = \frac{2}{2+a} = 3$$

이므로 $2=6+3a$, $3a=-4 \quad \therefore a=-\frac{4}{3}$

답 ④

09 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{2f(x)-g(x)\} = -2$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[g(x) \left\{ \frac{2f(x)}{g(x)} - 1 \right\} \right] = -2 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2f(x)}{g(x)} - 1 \right\} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)}{g(x)} = 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+4g(x)}{f(x)-5g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}+4}{\frac{f(x)}{g(x)}-5} = \frac{\frac{1}{2}+4}{\frac{1}{2}-5} = -1$$

답 ④

참고 ㉠에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2f(x)}{g(x)}-1}{\frac{1}{g(x)}} = -2$ 에서 극한값이 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g(x)} = 0$$
이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2f(x)}{g(x)} - 1 \right\} = 0$ 이다.

10 $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{xf(x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(-t)}{-tf(-t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{tf(t)} \quad (\because \text{조건 (가), (나)})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{tf(t)} = \frac{1}{3} \quad (\because \text{조건 (다)})$$

답 ①

11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2-x} = -2$ 에서 다항함수 $f(x)-x^3$ 은 최고차항의 계수가 -2 인 이차함수이다. 즉,

$$f(x)-x^3 = -2x^2+ax+b \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2}$ 의 값이 존재하므로 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-2)^2(x+k) \quad (k \text{는 상수})$$

꼴이다. 즉,

$$f(x) = x^3 + (k-4)x^2 + (-4k+4)x + 4k \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$-2=k-4, a=-4k+4, b=4k$$

$$\therefore k=2, a=-4, b=8$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-4x+8$ 이므로

$$f(1)=1-2-4+8=3$$

답 ②

12 $|f(x)-6x|<1$ 에서 $-1<f(x)-6x<1$

$$6x-1<f(x)<6x+1$$

$$x>\frac{1}{6} \text{에서 } (6x-1)^2 < \{f(x)\}^2 < (6x+1)^2$$

모든 실수 x 에 대하여 $4x^2-2x+1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 이므로

$$\frac{(6x-1)^2}{4x^2-2x+1} < \frac{\{f(x)\}^2}{4x^2-2x+1} < \frac{(6x+1)^2}{4x^2-2x+1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x-1)^2}{4x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2-12x+1}{4x^2-2x+1} = \frac{36}{4} = 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x+1)^2}{4x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2+12x+1}{4x^2-2x+1} = \frac{36}{4} = 9$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{4x^2-2x+1} = 9$$

답 ④

13 $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^2-3x)=2, \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+x+2)=2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2}{f(x)g(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2 + 1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \\ &= \frac{2^2+1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

다른풀이 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2}{f(x)g(x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{\{f(x)\}^2}{f(x)g(x)} + \frac{\{g(x)\}^2}{f(x)g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \right] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

14 점 A는 곡선 $y=\sqrt{x+2}$ 위의 점이고 점 A의 y 좌표는 a 이므로

$$\text{점 A의 } x\text{좌표는 } a=\sqrt{x+2} \text{에서 } a^2=x+2 \quad \therefore x=a^2-2$$

$$\therefore A(a^2-2, a)$$

점 B는 곡선 $y=-\sqrt{x-2}+2$ 위의 점이고 점 B의 y 좌표는 a 이

므로 점 B의 x 좌표는 $a=-\sqrt{x-2}+2$ 에서

$$a-2=-\sqrt{x-2}, (a-2)^2=x-2$$

$$\therefore x=(a-2)^2+2=a^2-4a+6$$

$$\therefore B(a^2-4a+6, a)$$

따라서 $C(a^2-4a+6, a^2-4a+6)$ 이고

$$\overline{AB}=(a^2-4a+6)-(a^2-2)=-4a+8$$

$$\overline{BC}=(a^2-4a+6)-a=a^2-5a+6$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{a \rightarrow 2} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} &= \lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2-5a+6}{-4a+8} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2} \frac{(a-2)(a-3)}{-4(a-2)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2} \frac{a-3}{-4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ②

15 $\overline{OQ}=3$ 이므로 직각삼각형 OPQ에서

$$\overline{QP}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{9-x^2}$$

이때 $\overline{AP}=3+x$ 이므로 직각삼각형

APQ에서

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{QP}^2} \\ &= \sqrt{(3+x)^2 + (\sqrt{9-x^2})^2} = \sqrt{6x+18} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6-f(x)}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6-\sqrt{6x+18}}{3-x}$$

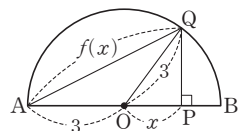
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(6-\sqrt{6x+18})(6+\sqrt{6x+18})}{(3-x)(6+\sqrt{6x+18})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{36-(6x+18)}{(3-x)(6+\sqrt{6x+18})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6(3-x)}{(3-x)(6+\sqrt{6x+18})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6}{6+\sqrt{6x+18}} = \frac{6}{6+6} = \frac{1}{2}$$

답 ①



16 출발한 지 t 초 후 점 A의 좌표는

$$A(2t+8, 0)$$

이때 선분 OA의 중점을 C라 하면

$$C(t+4, 0) \text{이므로}$$

$$\overline{OC}=t+4$$

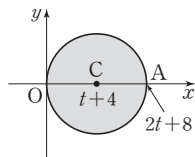
따라서 $\overline{OA}$ 를 지름으로 하는 원의 넓이는

$$S(t)=\pi(t+4)^2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi(t+4)^2}{t^2} = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2+8t+16}{t^2}$$

$$= \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{t} + \frac{16}{t^2} \right) = \pi \times 1 = \pi$$

답 ②



17 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-4x^2}{x-1}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-4x^2\}=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [\{g(x)-4x^2\} + 4x^2] = 0 + 4 = 4$$

이때 $f(x)=(x-1)g(x)-(x-1)^2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{(x-1)g(x)-(x-1)^2\}g(x)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)-(x-1)\}g(x)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)\}^2 - (x-1)g(x)}{x+1}$$

$$= \frac{4^2+0}{2} = 8$$

답 ②

18 $\triangle AQP \sim \triangle DPC$ (AA 답음)

이므로

$$\overline{AQ} : \overline{DP} = \overline{AP} : \overline{DC} \text{에서}$$

$$\overline{AQ} : (3-x) = x : 2$$

$$2\overline{AQ} = x(3-x)$$

$$\therefore \overline{AQ} = \frac{x(3-x)}{2}$$

이때 $\triangle CPQ = \square AQCD - \triangle AQP - \triangle CDP$ 이므로

$$S(x)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{x(3-x)}{2} + 2 \right\} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{x(3-x)}{2} \times x - \frac{1}{2} \times 2 \times (3-x)$$

$$= \frac{1}{4} \{ (-3x^2 + 9x + 12) - (-x^3 + 3x^2) - (12 - 4x) \}$$

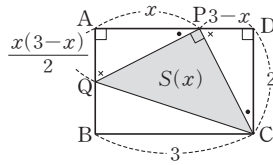
$$= \frac{1}{4} (x^3 - 6x^2 + 13x)$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 13x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4}(x^2 - 6x + 13) = \frac{13}{4}$$

$$\text{이므로 } m = \frac{13}{4}$$

$$\therefore 40m = 40 \times \frac{13}{4} = 130$$



..... ①

..... ②

..... ③

답 130

채점기준	배점
① $\overline{AQ}$ 를 x 에 대한 식으로 나타내기	2
② $S(x)$ 를 x 에 대한 식으로 나타내기	3
③ $40m$ 의 값 구하기	1

19 $a \geq 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{\sqrt{9x^2+1} - (ax+b)\} = \infty$ 이므로 $a < 0$ 이어야 한다. ①

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \{\sqrt{9x^2+1} - (ax+b)\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{9t^2+1} + at - b) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9t^2+1} + at - b)(\sqrt{9t^2+1} - (at - b))}{\sqrt{9t^2+1} - (at - b)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{9t^2 + 1 - (at - b)^2}{\sqrt{9t^2+1} - at + b} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(9-a^2)t^2 + 2abt + 1 - b^2}{\sqrt{9t^2+1} - at + b} = -2 \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

②의 값이 존재하므로

$$9 - a^2 = 0, a^2 = 9 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$

$a = -3$ 을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-6bt + 1 - b^2}{\sqrt{9t^2+1} + 3t + b} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-6b + \frac{1-b^2}{t}}{\sqrt{9 + \frac{1}{t^2}} + 3 + \frac{b}{t}} \\ &= \frac{-6b}{3+3} = -b = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = -3 + 2 = -1$$

..... ③

..... ④

답 -1

채점기준	배점
① $a < 0$ 임을 설명하기	1
② a 의 값 구하기	2
③ b 의 값 구하기	2
④ $a+b$ 의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.32~36

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x) + kg(x)\}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + k \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

$$= (-1) + k \times 3 = -1 + 3k,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \{f(x) + kg(x)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + k \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

$$= 2 + k \times 1 = 2 + k$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + kg(x)\}$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x) + kg(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{f(x) + kg(x)\} \text{ 이어야 하므로}$$

$$-1 + 3k = 2 + k$$

$$2k = 3 \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

답 ③

2 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \{kf(x) - g(x)\} = k \times 1 - 2 = k - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \{kf(x) - g(x)\} = k \times 2 - 1 = 2k - 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \{kf(x) - g(x)\}$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \{kf(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \{kf(x) - g(x)\} \text{ 이어야 하므로}$$

$$k - 2 = 2k - 1 \quad \therefore k = -1$$

답 ②

3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x+1)f(x)}{x^2-1}}{\frac{g(x)}{x^2-1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)f(x)}{\frac{g(x)}{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\frac{g(x)}{x^2-1}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

답 16

다른풀이 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{g(x)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times \frac{(x-1)(x+1)}{g(x)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times \frac{x^2-1}{g(x)} \right\} = 8 \times 2 = 16$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(\sqrt{x}+2)g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{f(x)}{x-4}}{\frac{(\sqrt{x}+2)g(x)}{x-4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{f(x)}{x-4}}{\frac{(\sqrt{x}+2)g(x)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{f(x)}{x-4}}{\frac{g(x)}{\sqrt{x}-2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12}{3} = 4
 \end{aligned}$$

답 4

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{\sqrt{x}-2} = 3$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{g(x)} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(\sqrt{x}+2)g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{f(x)}{x-4} \times \frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)g(x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{f(x)}{x-4} \times \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)g(x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{f(x)}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}-2}{g(x)} \right\} \\
 &= 12 \times \frac{1}{3} = 4
 \end{aligned}$$

5 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2} = 4$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)g(x) = 0$$

$\therefore f(-3)g(-3) = 0$ ($\because f(x)g(x)$ 는 다항함수) ㉠

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+g(x)}{x+3} = -4$$

에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \{f(x)+g(x)\} = 0$$

$\therefore f(-3)+g(-3) = 0$ ($\because f(x)+g(x)$ 는 다항함수) ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(-3) = 0, g(-3) = 0$

즉, 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 각각 $x+3$ 을 인수로 가지므로 $f(x) = a(x+3), g(x) = (x+3)(x+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)^2(x+b)}{(x+3)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} a(x+b) = a(-3+b) = 4 \quad \dots\dots ㉢
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)+g(x)}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3) + (x+3)(x+b)}{x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} (a+x+b) = a-3+b = -4
 \end{aligned}$$

$\therefore b = -a-1$ ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$$a(-3-a-1) = 4, a^2+4a+4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

㉢에서 $b = -(-2)-1 = 1$

따라서 $f(x) = -2(x+3), g(x) = (x+3)(x+1)$ 이므로

$$f(2) = -2 \times (2+3) = -10, g(2) = (2+3) \times (2+1) = 15$$

$$\therefore g(2) - f(2) = 15 - (-10) = 25$$

답 25

6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 3$ 에서 다항함수 $f(x)g(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이고, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)g(x)}{(x+1)^2} = -12$ 에서 삼차함수 $f(x)g(x)$ 는 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로

$$f(x)g(x) = 3(x+1)^2(x+a) \quad (a \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)g(x)}{(x+1)^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)^2(x+a)}{(x+1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} 3(x+a) = 3(-1+a) = -12 \\
 -1+a &= -4 \quad \therefore a = -3
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)g(x) = 3(x+1)^2(x-3)$ 이므로

$$g(x) = x+1 \text{ 또는 } g(x) = x-3$$

그런데 $g(2) < 0$ 이므로 $g(x) = x-3$

$$\therefore f(x) = 3(x+1)^2$$

따라서 $f(3) = 3 \times 4^2 = 48, g(0) = -3$ 이므로

$$f(3) + g(0) = 48 + (-3) = 45$$

답 ⑤

7 조건 ㉠에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)-1| = 0, |f(0)-1| = 0$$

$$f(0)-1 = 0 \quad \therefore f(0) = 1$$

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면 조건 ㉡에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)-1|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3 + ax^2 + bx|}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| |x^2 + ax + b|}{x}
 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| |x^2 + ax + b|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x |x^2 + ax + b|}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0+} |x^2 + ax + b| = |b| \\
 \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| |x^2 + ax + b|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x |x^2 + ax + b|}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-|x^2 + ax + b|) = -|b|
 \end{aligned}$$

이고, $|b| = -|b|$ 이므로 $b = 0$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + 1$$

이때 조건 ㉢에서

$$x(x^3 + ax^2 + 1) \geq -4x^2 + x$$

$$x^4 + ax^3 + x \geq -4x^2 + x$$

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 \geq 0, x^2(x^2 + ax + 4) \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로

$$x^2 + ax + 4 \geq 0$$

이 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4 \times 1 \times 4 = a^2 - 16 \leq 0, (a+4)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq a \leq 4$$

이때 $f(5) = 125 + 25a + 1 = 25a + 126$ 이므로 $f(5)$ 의 최댓값은 $a = 4$ 일 때 $25 \times 4 + 126 = 226$

답 226

- 8 조건 (가)에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) + 3| = 0, |f(0) + 3| = 0$$

$$f(0) + 3 = 0 \quad \therefore f(0) = -3$$

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3 \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) + 3|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^3 + ax^2 + bx|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| |x^2 + ax + b|}{x} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| |x^2 + ax + b|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x |x^2 + ax + b|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} |x^2 + ax + b| = |b| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| |x^2 + ax + b|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x |x^2 + ax + b|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-|x^2 + ax + b|) = -|b| \end{aligned}$$

이고, $|b| = -|b|$ 이므로 $b = 0$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 - 3$$

이때 조건 (나)에서

$$x(x^3 + ax^2 - 3) \geq -x^2 - 3x$$

$$x^4 + ax^3 - 3x \geq -x^2 - 3x$$

$$x^4 + ax^3 + x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 + ax + 1) \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로

$$x^2 + ax + 1 \geq 0$$

이 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4 \times 1 \times 1 = a^2 - 4 \leq 0, (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

이때 $f(2) = 8 + 4a - 3 = 4a + 5$ 이므로 $f(2)$ 의 최솟값은 $a = -2$ 일 때 $4 \times (-2) + 5 = -3$ 답 -3

- 9 직선 $y = x + t$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha > \beta$)라 하자.

$x^2 = x + t$, 즉 $x^2 - x - t = 0$ 의 두 실근은 α, β 이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 C는 점 A와 y 축에 대하여 대칭이므로 점 C의 x 좌표는 $-\alpha$ 이고

$$\overline{AH} = \alpha - \beta, \overline{CH} = \beta - (-\alpha) = \alpha + \beta = 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

그런데

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 4t \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{1 + 4t} \quad (\because \alpha > \beta)$$

$$\text{즉, } \overline{AH} = \sqrt{1 + 4t}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 + 4t} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{1 + 4t} - 1)(\sqrt{1 + 4t} + 1)}{t(\sqrt{1 + 4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(1 + 4t) - 1}{t(\sqrt{1 + 4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4t}{t(\sqrt{1 + 4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4}{\sqrt{1 + 4t} + 1} = \frac{4}{1 + 1} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

- 10 $\overline{AP} = \sqrt{\{t - (-1)\}^2 + \{-t - 1\}^2} = \sqrt{2}(t + 1) \quad (\because t > 0)$

두 점 A(-1, 0), P(t, -t-1)은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x - 1$ 의 교점이므로 두 점 A, P의 x 좌표 -1, t는 이차방정식 $f(x) = -x - 1$, 즉 $f(x) + x + 1 = 0$ 의 두 실근이다. 이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1이므로

$$f(x) + x + 1 = -(x + 1)(x - t)$$

$$\therefore f(x) = -(x + 1)(x - t) - x - 1$$

$$f(0) = -1 \times (-t) - 1 = t - 1 \text{이므로 } Q(0, t - 1)$$

$$\therefore \overline{AQ} = \sqrt{\{0 - (-1)\}^2 + \{t - 1\}^2} = \sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{AP} - \sqrt{2} \times \overline{AQ})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \{\sqrt{2}(t + 1) - \sqrt{2} \times \sqrt{t^2 - 2t + 2}\}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \{(t + 1) - \sqrt{t^2 - 2t + 2}\}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\{(t + 1) - \sqrt{t^2 - 2t + 2}\} \{(t + 1) + \sqrt{t^2 - 2t + 2}\}}{t + 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 2}}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t + 1)^2 - (t^2 - 2t + 2)}{t + 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 2}}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t - 1}{t + 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 2}}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t} + \sqrt{1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}}} \quad (\because t > 0)$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{4}{1 + 1} = 2\sqrt{2}$$

답 ③

2 함수의 연속

교과서 예제

p.39

- 01 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$, $f(2) = 4$
따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

- (2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{2}$
따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

- (3) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 정의되지 않으므로 $x=2$ 에서 불연속이다.

- (4) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$
 $f(2) = 3$
따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속 (4) 불연속

- 02 답 (1) $[1, 2]$ (2) $[-3, 2]$ (3) $\{x | -1 < x < 6\}$ (4) $\{x | x \geq 2\}$

- 03 (1) 함수 $f(x) = -x^2 + 3$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 이것을 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, \infty)$

- (2) $25 - x^2 \geq 0$ 에서 $x^2 - 25 \leq 0$
 $(x+5)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -5 \leq x \leq 5$
따라서 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x | -5 \leq x \leq 5\}$ 이므로 이를 구간의 기호로 나타내면 $[-5, 5]$

- (3) 함수 $f(x) = \frac{4x+3}{x-1}$ 의 정의역은 $\{x | x \neq 1 \text{인 실수}\}$ 이므로 이것을 구간의 기호로 나타내면
 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

- (4) $x+6 \geq 0$ 에서 $x \geq -6$
따라서 함수 $f(x) = \sqrt{x+6}$ 의 정의역은 $\{x | x \geq -6\}$ 이므로 이것을 구간의 기호로 나타내면
 $[-6, \infty)$

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $[-5, 5]$

(3) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (4) $[-6, \infty)$

- 04 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이 되려면 $x=-1$ 에서도 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$ 이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x-1) = -2, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (6x + a) = -6 + a,$$

$$f(-1) = -6 + a$$

$$\text{이므로 } -6 + a = -2 \quad \therefore a = 4$$

답 4

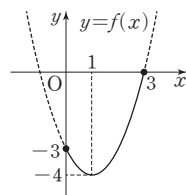
- 05 □. [반례] $f(x) = x$, $g(x) = 1$ 이면 $f(x)$, $g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이지만 함수 $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x 에서 항상 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

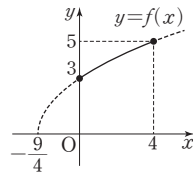
- 06 (1) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 0, $x=1$ 에서 최솟값 -4를 갖는다.

- (2) 함수 $f(x) = \sqrt{4x+9}$ 는 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

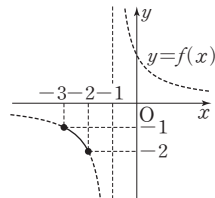


따라서 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 5, $x=0$ 에서 최솟값 3을 갖는다.

- (3) 함수 $f(x) = \frac{2}{x+1}$ 는 닫힌구간

$[-3, -2]$ 에서 연속이고 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



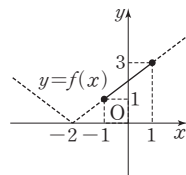
따라서 $-3 \leq x \leq -2$ 일 때, 함수

$f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 최댓값 -1, $x=-2$ 에서 최솟값 -2를 갖는다.

- (4) 함수 $f(x) = |x+2|$ 는 닫힌구간

$[-1, 1]$ 에서 연속이고 함수 $y=f(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$

는 $x=1$ 에서 최댓값 3, $x=-1$ 에서

최솟값 1을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -4 (2) 최댓값: 5, 최솟값: 3

(3) 최댓값: -1, 최솟값: -2 (4) 최댓값: 3, 최솟값: 1

- 07 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간

$[-1, 0]$ 에서 연속이고

$$f(-1) = -1 + 2 + 2 - 2 = 1 > 0, f(0) = -2 < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간

$(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 -1, 0, 1, -2, 0, -1, 0

01 ① $f(1)$ 이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0, f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2,$$

$$f(1) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (-1) = -1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-3x^2+1) = -3+1 = -2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=1$ 에서 연속인 함수는 ②이다.

답 ②

$$02 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지만 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.㉠

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는 실수 a 는 2의 1개

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 불연속인 실수 b 는 1, 2의 2개

$$\therefore M=1, N=2$$

$$\therefore M+N=1+2=3$$

답 ③

$$03 \neg. \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 0 \times 1 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

$$\neg. \neg \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0 \text{이고, } f(0)g(0) = 2 \times 1 = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) \neq f(0)g(0)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㉡이다.

답 ②

04 합성함수 $g(f(x))$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = g(f(2)) \text{이어야 한다.}$$

이때 $f(x)=t$ 라 하면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1} (t^2 + at + 2)$$

$$= 1 + a + 2 = a + 3$$

$$g(f(2)) = g(2) = 4 + 2a + 2 = 2a + 6$$

즉, $a+3=2a+6$ 이므로

$$a = -3$$

따라서 $g(x) = x^2 - 3x + 2$ 이므로

$$g(2) = 4 - 6 + 2 = 0$$

답 ③

05 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=2$ 에서 연속이어야 한다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = 2 - 3 = -1$$

$$f(2) = k$$

에서 $k = -1$

답 ②

06 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + 3x - 1) = 1 + 3 - 1 = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x + k) = -1 + k,$$

$$f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$$

$$\text{에서 } 3 = -1 + k \quad \therefore k = 4$$

답 ④

07 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + a + b}}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

.....㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x^2 + a + b}) = 0$$

$$\sqrt{1+a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{1+a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+a}} = \frac{-2}{2\sqrt{1+a}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+a}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{1+a}=2, 1+a=4 \quad \therefore a=3$$

$$a=3\text{을 } \textcircled{1}\text{에 대입하면 } b=-2$$

$$\therefore ab=3 \times (-2)=-6$$

답 ①

08 $x \neq -2$ 일 때, $f(x) = \frac{x^2+x+a}{x+2}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-2$ 에서도 연속이므로

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x+a}{x+2}$$

이어야 한다. 이때 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x+a}{x+2}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow -2$ 일

때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2+x+a)=0$$

$$4-2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = -2-1 = -3 \end{aligned}$$

답 ③

09 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} \{a(x-3)^2+b\} = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x+9) = 3+9=12,$$

$$f(3)=b$$

$$\text{이므로 } b=12$$

또, 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \{a(x-3)^2+12\} = 4a+12 \text{이고}$$

$$\text{조건 ㉠에서 } f(5)=f(0)=9 \text{이므로}$$

$$4a+12=9, 4a=-3 \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore ab = -\frac{3}{4} \times 12 = -9$$

답 ⑤

10 ① [반례] $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq 0) \\ -1 & (x > 0) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq 0) \\ -1 & (x > 0) \end{cases}$ 이면

$f(x)-g(x)=0$ 이므로 $f(x)-g(x)$ 는 연속함수이지만 $f(x), g(x)$ 는 모두 $x=0$ 에서 불연속이다.

② [반례] $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq 0) \\ -1 & (x > 0) \end{cases}$ 이면 $\{f(x)\}^2=1$ 이므로

$\{f(x)\}^2$ 은 연속함수이지만 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

④ [반례] $f(x)=0, g(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이면 $f(x)g(x)=0$

이므로 $f(x)$ 와 $f(x)g(x)$ 는 연속함수이지만 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

⑤ [반례] $f(x)=0, g(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이면 $g(f(x))=1$

이므로 $f(x)$ 와 $g(f(x))$ 는 연속함수이지만 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

11 함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{2x^2+kx+2}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이므로

모든 실수 x 에 대하여 $2x^2+kx+2 \neq 0$ 이어야 한다. 즉,

이차방정식 $2x^2+kx+2=0$ 의 실근이 존재하지 않아야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4 \times 2 \times 2=k^2-16 < 0, (k+4)(k-4) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 4$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 3이다.

답 ③

12 함수 $f(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-3)(2x+a) = -2(2+a),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+a)(2x+a) = (1+a)(2+a),$$

$$f(1)g(1) = -2(2+a)$$

이므로

$$-2(2+a) = (1+a)(2+a)$$

$$2(2+a) + (1+a)(2+a) = 0, (a+2)(a+3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = -3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-2 + (-3) = -5$$

답 ④

13 ㄱ. 함수 $f(x)+g(x)=x-2+\frac{1}{x+2}$ 은 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서

연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(g(x)) = \frac{1}{x+2} - 2$ 는 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이므로

로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $g(f(x)) = \frac{1}{x}$ 은 $x=0$ 에서 불연속이고, $x \rightarrow 0+$ 일 때 $g(f(x)) \rightarrow \infty$ 이므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 최댓값을 갖지 않는다.
따라서 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 것은 $\neg$, ㄴ이다. 답 ②

- 14 $f(x) = x^3 - 4x - 4$ 라 하면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고
 $f(-2) = -8 + 8 - 4 = -4 < 0$,
 $f(-1) = -1 + 4 - 4 = -1 < 0$,
 $f(0) = -4 < 0$,
 $f(1) = 1 - 4 - 4 = -7 < 0$,
 $f(2) = 8 - 8 - 4 = -4 < 0$,
 $f(3) = 27 - 12 - 4 = 11 > 0$
 따라서 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 존재하는 구간은 ⑤ $(2, 3)$ 이다. 답 ⑤

- 15 함수 $f(x)$ 는 연속함수이고 $f(-1)f(0) < 0$, $f(0)f(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 2개의 실근을 가지므로 $n=2$ 답 ②

기출 Best | 2회

p.43~45

- 01 ① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0$, $f(0) = 0$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
 따라서 함수 $f(x) = x^2 + x$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 ② $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, $f(0) = 0$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 ③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2-4} = -\frac{1}{4}$, $f(0) = -\frac{1}{4}$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 ④ $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 1) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-3x) = 0$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.
 ⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3$, $f(0) = 3$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
 따라서 $x=0$ 에서 불연속인 함수는 ④이다. 답 ④

- 02 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, $f(0) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지만 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. ㉠
 또, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. ㉡
 ㉠, ㉡에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는 실수 a 는 1의 1개, 함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 불연속인 실수 b 는 0, 1의 2개이다.
 $\therefore M=1, N=2$
 $\therefore N-M=2-1=1$ 답 ③

- 03 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$
 $= -1 \times 1 = -1$,
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$
 $= -1 \times (-1) = 1$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x)$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (참)
 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$
 $= -1 + 1 = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$
 $= -1 + (-1) = -2$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\}$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x) + g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)
 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x)$
 $= -1 \times 1 = -1$,
 $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x)$
 $= 1 \times (-1) = -1$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = -1$
 또, $f(-1)g(-1) = 1 \times (-1) = -1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$ 이므로
 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다. (참)
 따라서 옳은 것은 $\neg$, ㄷ이다. 답 ④

- 04 합성함수 $g(f(x))$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = g(f(1))$ 이어야 한다.
 $f(x) = t$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 2+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow 2+} g(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} (2t^3 + at^2 + bt + 1) \\ &= 4a + 2b + 17 \\ x \rightarrow 1- \text{일 때 } t \rightarrow 0- \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0-} (2t^3 + at^2 + bt + 1) = 1 \\ g(f(1)) &= g(1) = 2 + a + b + 1 = a + b + 3 \\ \text{즉, } 4a + 2a + 17 &= 1 = a + b + 3 \text{이므로} \\ 4a + 2b + 17 &= 1 \text{에서} \\ 4a + 2b &= -16 \\ \therefore 2a + b &= -8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 1 = a + b + 3 \text{에서} \\ a + b &= -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면} \\ a = -6, b &= 4 \\ \therefore b - a &= 4 - (-6) = 10\end{aligned}$$

답 ①

- 05 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=3$ 에서 연속이어야 한다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+4) = 3+4=7,\end{aligned}$$

$$f(3) = k$$

$$\text{에서 } k = 7$$

답 ④

- 06 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이 되려면 $x=-2$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = f(-2)$ 이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} (2x + k) = -4 + k, \\ \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-} (x^2 + kx + 1) \\ &= 4 - 2k + 1 = -2k + 5,\end{aligned}$$

$$f(-2) = -4 + k$$

$$\text{에서 } -4 + k = -2k + 5$$

$$3k = 9 \quad \therefore k = 3$$

답 ③

- 07 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a} + b}{x^2} = \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

①에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + a} + b) = 0$$

$$\sqrt{a} + b = 0 \quad \therefore b = -\sqrt{a} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a} + b}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{a}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{a})(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{a})}{x^2(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + a) - a}{x^2(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2\sqrt{a} = 4, \sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 4$$

$$a = 4 \text{를 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } b = -2$$

$$\therefore a - b = 4 - (-2) = 6$$

답 ⑤

- 08 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{ax^3 + bx}{x-1}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + bx}{x-1}$$

이어야 한다. 이때 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + bx}{x-1}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 + bx) = 0$$

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \frac{ax^3 - ax}{x-1} = \frac{ax(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= ax(x+1) \quad (\text{단, } x \neq 1)\end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(3) = 12 \text{이므로 } a \times 3 \times 4 = 12 \quad \therefore a = 1$$

$$\text{따라서 } \textcircled{㉠} \text{에서 } b = -1$$

$$\therefore ab = 1 \times (-1) = -1$$

답 ②

다른풀이 $f(3) = 12$ 이므로 $(x-1)f(x) = ax^3 + bx$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$2f(3) = 27a + 3b, 2 \times 12 = 27a + 3b$$

$$\therefore 9a + b = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a = 1, b = -1$$

$$\text{참고 } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ax(x+1) = 2a \text{이므로}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = ax(x+1)$ 이다.

- 09 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

이때 조건 ㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (-x^2 + ax + b) = -4 + 2a + b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x-1) = 2-1=1,$$

$$f(2) = -4 + 2a + b$$

$$\text{이므로 } -4 + 2a + b = 1 \quad \therefore 2a + b = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (-x^2 + ax + b) = -16 + 4a + b \text{이고}$$

조건 ㉔에서 $f(4) = f(0) = -1$ 이므로

$$-16 + 4a + b = -1 \quad \therefore 4a + b = 15 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉓, ㉕을 연립하여 풀면

$$a = 5, b = -5$$

$$\therefore a + b = 5 + (-5) = 0$$

답 ③

10 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - 2g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= f(a) - 2g(a) \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x) - 2g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \times f(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= f(a) \times f(a) = \{f(a)\}^2 \end{aligned}$$

즉, 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x) = x - a, g(x) = x - a$ 이면 $f(x), g(x)$ 는 모두

$x=a$ 에서 연속이지만 함수 $\frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{(x-a)^2}$ 은 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x) = x - a, g(x) = x - a$ 이면 $f(x), g(x)$ 는 모두

$x=a$ 에서 연속이지만 함수 $\frac{2f(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{2}{x-a}$ 는 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

따라서 $x=a$ 에서 항상 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

11 함수 $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4x + k}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이므로

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + k \neq 0$ 이어야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2 + 4x + k = 0$ 의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \times k = 4 - k < 0 \quad \therefore k > 4$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

12 함수 $f(x)$ 는 $x \neq a$ 인 모든 실수 x 에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = f(a)g(a)$$

이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} (x^2 - x)(x - 2a - 7) \\ &= (a^2 - a)(-a - 7), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} (x + 3)(x - 2a - 7) \\ &= (a + 3)(-a - 7), \end{aligned}$$

$$f(a)g(a) = (a + 3)(-a - 7)$$

이므로

$$(a^2 - a)(-a - 7) = (a + 3)(-a - 7)$$

$$\{(a^2 - a) - (a + 3)\}(-a - 7) = 0$$

$$(a^2 - 2a - 3)(-a - 7) = 0$$

$$(a + 7)(a + 1)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -7 \text{ 또는 } a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-7 \times (-1) \times 3 = 21$$

답 ②

13 ㄱ. 함수 $f(x) = -\frac{1}{x+3}$ 은 $x \neq -3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$ 은 $x=2$ 에서 정의되지 않고

$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 최댓값을 갖지 않는다.

따라서 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

14 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 3$ 이라 하면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$f(-1) = -1 + 1 + 2 - 3 = -1 < 0,$$

$$f(0) = -3 < 0,$$

$$f(1) = 1 + 1 - 2 - 3 = -3 < 0,$$

$$f(2) = 8 + 4 - 4 - 3 = 5 > 0,$$

$$f(3) = 27 + 9 - 6 - 3 = 27 > 0,$$

$$f(4) = 64 + 16 - 8 - 3 = 69 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) = 0$ 의 실근이 존재하는 구간은 ③ $(1, 2)$ 이다. 답 ③

15 함수 $f(x)$ 는 연속함수이고

$$f(0)f(1) < 0, f(1)f(2) < 0, f(2)f(3) < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간

$(0, 1), (1, 2), (2, 3)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 3개의 실근을 가지므로

$$n \geq 3$$

답 ③

변형유형 집중공략

p.46~49

1-1 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (bx+1) = b+1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2+a) = -1+a,$$

$$f(1) = b+1$$

$$\text{이므로 } b+1 = -1+a \quad \therefore a-b=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (bx+1) = 2b+1 \text{이고}$$

$$f(x+1) = f(x-1) \text{에서 } f(2) = f(0) = a \text{이므로}$$

$$2b+1 = a \quad \therefore a-2b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=3, b=1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & (0 \leq x < 1) \\ x+1 & (1 \leq x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x+1) = f(x-1) \text{에서}$$

$$f(7) = f(5) = f(3) = f(1) = 1+1=2$$

$$f(8) = f(6) = f(4) = f(2) = f(0) = 3$$

$$\therefore f(7) + f(8) = 2+3=5$$

답 5

1-2 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+ax+b) = 4+2a+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (|x-2|+1) = 1,$$

$$f(2) = 4+2a+b$$

$$\text{이므로 } 4+2a+b=1 \quad \therefore 2a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2+ax+b) = 9+3a+b \text{이고}$$

$$\text{조건 (나)에서 } f(3) = f(0) = |-2|+1=3$$

$$\text{이므로 } 9+3a+b=3 \quad \therefore 3a+b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-3, b=3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} |x-2|+1 & (0 \leq x < 2) \\ x^2-3x+3 & (2 \leq x < 3) \end{cases} \text{이므로 조건 (나)에서}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}+3\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{15}{2} + 3 = \frac{7}{4}$$

$$\therefore 40f\left(-\frac{1}{2}\right) = 40 \times \frac{7}{4} = 70$$

답 70

$$2-1 \quad f(x-a) = \begin{cases} (x-a)+1 & (x \leq a) \\ -\frac{1}{4}(x-a)+8 & (x > a) \end{cases}$$

함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=a$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = f(a)f(0)$$

이어야 한다.

(i) $a < 0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a+} (x+1) \left\{ -\frac{1}{4}(x-a)+8 \right\}$$

$$= (a+1) \times 8 = 8a+8,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a-} (x+1)(x-a+1)$$

$$= (a+1) \times 1 = a+1,$$

$$f(a)f(0) = (a+1) \times 1 = a+1$$

$$\text{이므로 } a+1 = 8a+8, -7a=7 \quad \therefore a=-1$$

(ii) $a=0$ 일 때

$$f(x)f(x-a) = \{f(x)\}^2 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{4}x+8 \right)^2 = 64,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+1)^2 = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)\}^2 \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)\}^2$ 이므로 함수 $f(x)f(x-a)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

(iii) $a > 0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a+} \left(-\frac{1}{4}x+8 \right) \left\{ -\frac{1}{4}(x-a)+8 \right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}a+8 \right) \times 8 = -2a+64,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a-} \left(-\frac{1}{4}x+8 \right) (x-a+1)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}a+8 \right) \times 1 = -\frac{1}{4}a+8,$$

$$f(a)f(0) = \left(-\frac{1}{4}a+8 \right) \times 1 = -\frac{1}{4}a+8$$

이므로

$$-2a+64 = -\frac{1}{4}a+8, -\frac{7}{4}a = -56 \quad \therefore a=32$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=a$ 에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의 값은 $a=-1$ 또는 $a=32$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1+32=31$$

답 31

2-2 $f(-x)$

$$= \begin{cases} -2 \times (-x) + 3 & (|-x| > 2) \\ (-x)^2 + 1 & (|-x| \leq 2) \end{cases} = \begin{cases} 2x+3 & (|x| > 2) \\ x^2+1 & (|x| \leq 2) \end{cases}$$

$$f(x)+k = \begin{cases} -2x+3+k & (|x| > 2) \\ x^2+1+k & (|x| \leq 2) \end{cases}$$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(-x)\{f(x)+k\} = \lim_{x \rightarrow 2-} f(-x)\{f(x)+k\} \\ = f(-2)\{f(2)+k\}$$

이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(-x)\{f(x)+k\} = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x+3)(-2x+3+k) \\ = 7(-1+k)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(-x)\{f(x)+k\} = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2+1)(x^2+1+k) \\ = 5(5+k)$$

$$\text{이므로 } 7(-1+k) = 5(5+k), -7+7k = 25+5k$$

$$2k=32 \quad \therefore k=16$$

답 16

다른 풀이 $-x=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow -2-$, $x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow -2+$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2+} f(-x) \{f(x) + k\} \\ & \lim_{x \rightarrow 2+} f(-x) \times \lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) + k\} \\ & = \lim_{t \rightarrow -2-} f(t) \times \lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) + k\} \\ & = \lim_{t \rightarrow -2-} (-2t+3) \times \lim_{x \rightarrow 2+} \{(-2x+3) + k\} \\ & = 7 \times (k-1) = 7k-7, \\ & \lim_{x \rightarrow 2-} f(-x) \{f(x) + k\} \\ & = \lim_{x \rightarrow 2-} f(-x) \times \lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) + k\} \\ & = \lim_{t \rightarrow -2+} f(t) \times \lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) + k\} \\ & = \lim_{t \rightarrow -2+} (t^2+1) \times \lim_{x \rightarrow 2-} \{(x^2+1) + k\} \\ & = 5 \times (k+5) = 5k+25, \\ & f(-2) \{f(2) + k\} = 5 \times (5+k) = 5k+25 \\ & \text{이므로} \\ & 7k-7 = 5k+25, 2k=32 \quad \therefore k=16 \end{aligned}$$

3-1 열린구간 (1, 5)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=x$, 즉 $f(x)-x=0$ 의 실근의 개수와 같다.

$$\begin{aligned} & f(x)-x=g(x) \text{라 하면 } g(x)=0 \\ & g(1)=f(1)-1=-2-1=-3<0 \\ & g(2)=f(2)-2=3-2=1>0 \\ & g(3)=f(3)-3=3-3=0 \\ & g(4)=f(4)-4=3-4=-1<0 \\ & g(5)=f(5)-5=8-5=3>0 \\ & \text{이때 함수 } g(x) \text{는 연속함수이고 } g(1)g(2)<0, g(4)g(5)<0 \\ & \text{이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 } g(x)=0 \text{은 열린구간} \\ & (1, 2), (4, 5) \text{에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.} \\ & \text{또, } g(3)=0 \text{이므로 } x=3 \text{은 방정식 } g(x)=0 \text{의 해이다.} \\ & \text{따라서 방정식 } g(x)=0, \text{ 즉 } f(x)=x \text{는 열린구간 } (1, 5) \text{에서} \\ & \text{적어도 3개의 실근을 갖는다.} \\ & \therefore n=3 \end{aligned}$$

3-2 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)f(3)<0, f(5)f(7)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (1, 3), (5, 7)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$\begin{aligned} & \text{이때 모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x)=f(-x) \text{이므로} \\ & f(-1)f(-3)<0, f(-5)f(-7)<0 \\ & \text{즉, 사잇값 정리에 의하여 방정식 } f(x)=0 \text{은 열린구간} \\ & (-3, -1), (-7, -5) \text{에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.} \\ & \text{따라서 방정식 } f(x)=0 \text{은 적어도 4개의 실근을 갖는다.} \\ & \therefore n=4 \end{aligned}$$

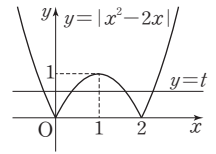
4-1 $x^2-2x \geq 0$ 에서 $x(x-2) \geq 0$
 $\therefore x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$

$$x^2-2x < 0 \text{에서 } x(x-2) < 0 \quad \therefore 0 < x < 2$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= |x^2-2x| \\ &= \begin{cases} x^2-2x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2+2x & (0 < x < 2) \end{cases} \end{aligned}$$

함수 $y=|x^2-2x|$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t=0 \text{ 또는 } t > 1) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 3 & (t=1) \end{cases}$$



따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=0, t=1$ 에서 불연속이므로 함수 $(t^2+at+b)f(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 이차방정식 $t^2+at+b=0$ 의 두 실근이 0, 1이어야 한다. 즉,

$$t^2+at+b=t(t-1)=t^2-t$$

$$\text{이므로 } a=-1, b=0$$

$$\therefore a+b=-1+0=-1$$

답 -1

다른 풀이 이차방정식 $t^2+at+b=0$ 의 두 실근이 0, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$0+1=-a \quad \therefore a=-1$$

$$0 \times 1 = b \quad \therefore b=0$$

4-2 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선

$y=2x+t$ 가 접할 때, 원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=2x+t$, 즉 $2x-y+t=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|t|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|t|=5 \quad \therefore t=\pm 5$$

$$\therefore f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -5 \text{ 또는 } t > 5) \\ 1 & (t = -5 \text{ 또는 } t = 5) \\ 2 & (-5 < t < 5) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=-5, t=5$ 에서 불연속이므로 함수 $(t^2+at+b)f(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 이차방정식 $t^2+at+b=0$ 의 두 실근이 -5, 5이어야 한다. 즉,

$$t^2+at+b=(t+5)(t-5)=t^2-25$$

$$\text{이므로 } a=0, b=-25$$

$$\therefore a+b=0+(-25)=-25$$

답 -25

참고 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+t$ 가

① 서로 다른 두 점에서 만나려면 $-f(t)=2$ 인 경우

$$\frac{|t|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} < \sqrt{5}, |t| < 5$$

$$\therefore -5 < t < 5$$

② 만나지 않으려면 $-f(t)=0$ 인 경우

$$\frac{|t|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} > \sqrt{5}, |t| > 5$$

$$\therefore t < -5 \text{ 또는 } t > 5$$

서술형 What & How

p.50~53

- 1 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고, $g(0)=3$ 이므로 $g(x)=x^3+ax^2+bx+3$ (a, b 는 상수)이라 하자.

함수 $f(x)$ 가 $x=0, x=2$ 에서 불연속이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0, x=2$ 에서 연속이어야 한다. ①

$f(x)=t$ 라 하고, 함수 $(g \circ f)(x)$ 가

(i) $x=0$ 에서 연속이려면

$x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ -이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = g(1),$$

$$g(f(0)) = g(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0)) \text{ 이어야 하므로 } g(1) = 3$$

$$1+a+b+3=3 \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) $x=2$ 에서 연속이려면

$x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = g(-1)$$

$x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = g(0) = 3$$

$$g(f(2)) = g(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x)) = g(f(2)) \text{ 이어야 하므로}$$

$$g(-1) = 3$$

$$-1+a-b+3=3 \quad \therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a=0, b=-1$$

따라서 $g(x)=x^3-x+3$ 이므로

$$g(3)=27-3+3=27 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 27

참고 함수 $g(f(x))$ 가 $x=0$ 에서 연속이려면 $g(1)=g(0)$,

$x=2$ 에서 연속이려면 $g(-1)=g(0)$

$$\text{이므로 } g(1)=g(-1)=g(0)=3,$$

$$\text{즉 } g(1)-3=g(-1)-3=g(0)-3=0 \text{ 이므로}$$

$$g(x)-3=x(x+1)(x-1)$$

$$\therefore g(x)=x(x+1)(x-1)+3$$

- 2 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=2$ 에서 불연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) \neq f(g(2)) \text{ 이어야 한다.} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4 \text{ 이므로 } g(x)=t \text{ 라 하면}$$

$$x \rightarrow 2 \text{ 일 때 } t \rightarrow (k-4) \text{ 이다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow (k-4)+} f(t),$$

$$f(g(2)) = f(k-4)$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow (k-4)+} f(t) \neq f(k-4) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

즉, 함수 $f(x)$ 의 $x=k-4$ 에서의 우극한과 $x=k-4$ 에서의 함

숫값이 서로 달라야 하므로 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$k-4=2 \text{ 또는 } k-4=3 \quad \therefore k=6 \text{ 또는 } k=7$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$6+7=13 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 13

채점기준	배점
① 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=2$ 에서 불연속이 될 조건을 설명하기	1
② 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=2$ 에서 불연속이 될 $f(x)$ 의 조건 구하기	3
③ 모든 실수 k 의 값의 합 구하기	2

참고 $k-4=1$ 일 때

$\lim_{t \rightarrow (k-4)+} f(t) = f(k-4) = 3$ 이므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

- 3 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a$ 에서 연속이려면 된다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = f(a)g(a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} (x^2-x)(2x+a) \\ &= (a^2-a) \times 3a = 3a(a^2-a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} (x+8)(2x+a) \\ &= (a+8) \times 3a = 3a(a+8), \end{aligned}$$

$$f(a)g(a) = (a^2-a) \times 3a = 3a(a^2-a)$$

에서

$$3a(a^2-a) = 3a(a+8) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$3a(a^2-a) - 3a(a+8) = 0, 3a\{(a^2-a) - (a+8)\} = 0$$

$$3a(a^2-2a-8) = 0, 3a(a+2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=-2 \text{ 또는 } a=4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$0 + (-2) + 4 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 2

- 4 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a$ 에서 연속이려면 된다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = f(a)g(a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} (x^2-5x)(x+a-4) \\ &= (a^2-5a)(2a-4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} (2x-12)(x+a-4) \\ &= (2a-12)(2a-4), \end{aligned}$$

$$f(a)g(a) = (a^2-5a)(2a-4)$$

에서

$$(a^2-5a)(2a-4) = (2a-12)(2a-4) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(a^2-5a)(2a-4) - (2a-12)(2a-4) = 0$$

$$(2a-4)\{(a^2-5a) - (2a-12)\} = 0$$

$$(2a-4)(a^2-7a+12) = 0, 2(a-2)(a-3)(a-4) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=3 \text{ 또는 } a=4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$2+3+4=9$$

..... ④

답 9

채점기준	배점
① 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 될 조건 설명하기	1
② ①에 따라 a 에 대한 등식 세우기	2
③ ②를 풀어 a 의 값 구하기	2
④ 모든 실수 a 의 값의 합 구하기	1

- 5 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{x^2+ax-5}{x-1}$ ①

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속
이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-5}{x-1}$$

이어야 한다. 이때 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-5}{x-1}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 1$

일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax-5) = 0, a-4=0 \quad \therefore a=4 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+5) = 6 \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore a+f(1) = 4+6=10 \quad \text{..... ④}$$

답 10

- 6 $x \neq 2$ 일 때, $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+a}{x-2}$ ①

함수 $f(x)$ 가 $x \geq -3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서도
연속이므로

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3}+a}{x-2}$$

이어야 한다. 이때 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3}+a}{x-2}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일

때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+3}+a) = 0, \sqrt{5}+a=0 \quad \therefore a=-\sqrt{5} \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)-5}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore \frac{a}{f(2)} = \frac{-\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{10}} = -10 \quad \text{..... ④}$$

답 -10

채점기준	배점
① $x \neq 2$ 일 때 $f(x)$ 구하기	1
② a 의 값 구하기	2
③ $f(2)$ 의 값 구하기	2
④ $\frac{a}{f(2)}$ 의 값 구하기	1

- 7 $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합
에서 연속이다.

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 중근이 아닌 오
직 하나의 실근을 가지려면 사잇값 정리에 의하여

$$f(-1)f(0) < 0 \text{ 이어야 한다. 즉,} \quad \text{..... ①}$$

$$(a-4) \times a < 0, a(a-4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \quad \text{..... ②}$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{는 } 1, 2, 3 \text{의 } 3 \text{개이다.} \quad \text{..... ③}$$

답 3

- 8 다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(1, 4)$ 에서 중근이 아닌 오직
하나의 실근을 가지려면 사잇값 정리에 의하여

$$f(1)f(4) < 0 \text{ 이어야 한다. 즉,} \quad \text{..... ①}$$

$$(a-5)(a+1) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 5 \quad \text{..... ②}$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4이므로 모든 정수 a 의 값의 합은

$$0+1+2+3+4=10 \quad \text{..... ③}$$

답 10

채점기준	배점
① 방정식 $f(x)=0$ 의 중근이 아닌 오직 하나의 실근이 열린구간 $(1, 4)$ 에 존재할 조 건 설명하기	2
② a 의 값의 범위 구하기	2
③ 모든 정수 a 의 값의 합 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.54~57

- 01 $\neg. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x|x-2| = 0,$

$$f(2) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연
속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} |x-1| = 1,$$

$$f(2) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연
속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (1 + \sqrt{x-2}) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \sqrt{4-x} = \sqrt{2}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=2$ 에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

02 ①, ② $f(x)$, $g(x)$ 는 다항함수이므로 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

③ $f(x)=0$ 에서 $x^2-8x+12=0$

$$(x-2)(x-6)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=6$$

즉, 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x=2$ 또는 $x=6$ 에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

④ 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=-x^2-2<0$ 이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$

는 모든 실수 x 에서 정의되고 연속이다.

⑤ $f(x)-g(x)=x^2-8x+12-(-x^2-2)$

$$=2x^2-8x+14$$

$$=2(x-2)^2+6>0$$

이므로 함수 $\frac{1}{f(x)-g(x)}$ 은 모든 실수 x 에서 정의되고 연속이다.

따라서 모든 실수 x 에서 연속이라고 할 수 없는 함수는 ③이다.

답 ③

03 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2+ax+b) = 1-a+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (3x-1) = -3-1 = -4,$$

$$f(-1) = -4$$

$$\text{이므로 } 1-a+b = -4 \quad \therefore a-b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x+1) = 2 \times 2 + 1 = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2+ax+b) = 4+2a+b,$$

$$f(2) = 4+2a+b$$

$$\text{이므로 } 5 = 4+2a+b \quad \therefore 2a+b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$$\therefore a+b = 2+(-3) = -1 \quad \text{답 ⑤}$$

04 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= -1 \times (-1) = 1 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = -1 \times 1 = -1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= 1 \times (-1) = -1, \end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = -1 \times 1 = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 이므로

로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= -1 - (-1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)-g(x)\}, \text{ 즉}$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

05 $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$,

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이다.

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -1 + 1 = 0 \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(-x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(-x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(-x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(-x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x) \\ &= -1 \times 1 = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(-x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) \\ &= 1 \times (-1) = -1, \end{aligned}$$

$$f(1)f(-1) = 1 \times (-1) = -1$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(-x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(-x) = f(1)f(-1)$$

이므로 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

06 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2+bx+3}{x^2-2x-3} = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 3} (ax^2+bx+3) = 0$$

$$9a+3b+3=0 \quad \therefore b = -3a-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2+bx+3}{x^2-2x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2+(-3a-1)x+3}{x^2-2x-3} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(ax-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax-1}{x+1}$$

$$= \frac{3a-1}{4} = \frac{5}{4}$$

이므로

$$3a-1=5, 3a=6 \quad \therefore a=2$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$b=-6-1=-7$$

$$\therefore a-b=2-(-7)=9$$

답 ④

07 함수 $f(x)\{f(x)+k\}$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)\{f(x)+k\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)\{f(x)+k\}$$

$$= f(1)\{f(1)+k\}$$

이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)\{f(x)+k\} = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x^2)(-x^2+k)$$

$$= -1 \times (-1+k)$$

$$= -k+1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)\{f(x)+k\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2-3x+5)\{(x^2-3x+5)+k\}$$

$$= 3(3+k) = 3k+9,$$

$$f(1)\{f(1)+k\} = -1 \times (-1+k)$$

$$= -k+1$$

이므로

$$-k+1=3k+9, -4k=8 \quad \therefore k=-2$$

답 ①

08 $x \neq 4$ 일 때, $(x-\sqrt{32-x^2})f(x)=x-4$ 에서

$$f(x) = \frac{x-4}{x-\sqrt{32-x^2}}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 연속이므로

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x-\sqrt{32-x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+\sqrt{32-x^2})}{(x-\sqrt{32-x^2})(x+\sqrt{32-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+\sqrt{32-x^2})}{x^2-(32-x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+\sqrt{32-x^2})}{2x^2-32}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+\sqrt{32-x^2})}{2(x+4)(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+\sqrt{32-x^2}}{2(x+4)}$$

$$= \frac{4+\sqrt{32-16}}{2 \times (4+4)} = \frac{1}{2}$$

답 ③

09 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = f(g(1))$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(2x+a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \{(2x+a)^2 - 8(2x+a) + a\}$$

$$= (2+a)^2 - 8(2+a) + a$$

$$= a^2 - 3a - 12,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(4x-3a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \{(4x-3a)^2 - 8(4x-3a) + a\}$$

$$= (4-3a)^2 - 8(4-3a) + a$$

$$= 9a^2 + a - 16,$$

$$f(g(1)) = f(2+a)$$

$$= (2+a)^2 - 8(2+a) + a$$

$$= a^2 - 3a - 12$$

에서

$$a^2 - 3a - 12 = 9a^2 + a - 16$$

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$(a+1)(2a-1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because a \text{는 정수})$$

답 ②

다른풀이 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = f(g(1))$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(2x+a)$$

$$= f(2+a),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(4x-3a)$$

$$= f(4-3a),$$

$$f(g(1)) = f(2+a)$$

이므로

$$f(2+a) = f(4-3a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=4$ 이므로

①에서

$$2+a=4-3a \text{ 또는 } \frac{(2+a)+(4-3a)}{2}=4$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = -1$$

a 는 정수이므로 $a = -1$

10 조건 ㉠에서

$$x < 0 \text{ 일 때, } g(x) = f(x) - x - 6$$

$$x > 0 \text{ 일 때, } g(x) = -f(x) + x^2 + 3x + 3$$

이고, 조건 ㉡에서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) - x - 6\} = f(0) - 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{-f(x) + x^2 + 3x + 3\} = -f(0) + 3$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 5$ 이므로

$$-f(0) + 3 - \{f(0) - 6\} = 5, -2f(0) + 9 = 5$$

$$-2f(0) = -4$$

$$\therefore f(0) = 2$$

답 ②

- 11 조건 (가)에서 $f(-1)=0, f(0)=0, f(2)=0$ 이므로

$$f(x)=ax(x+1)(x-2) \quad (a는 a \neq 0인 상수)$$

로 놓으면 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} ax(x-2) \\ = -a \times (-3) = 3a = 6$$

$$\therefore a=2$$

따라서 $f(x)=2x(x+1)(x-2)$ 이므로

$$f(3)=2 \times 3 \times 4 \times 1 = 24$$

답 ③

- 12 집합 A 는 방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a-1)=0$ 의 실근의 집합
이므로 $f(a)$ 는 방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수이다.

(i) $a=0$ 일 때

$$ax^2+2(a-1)x-(a-1)=0에서 -2x+1=0$$

$$-2x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(0)=1$$

(ii) $a \neq 0$ 일 때

이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a-1)=0$ 의 판별식을
 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a\{-(a-1)\} = a^2 - 2a + 1 + a^2 - a \\ = 2a^2 - 3a + 1 = (2a-1)(a-1)$$

(㉠) $\frac{D}{4} > 0$, 즉 $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{1}{2}$ 또는 $a > 1$ 일 때,

이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a-1)=0$ 은 서로 다른
두 실근을 가지므로 $f(a)=2$

(㉡) $\frac{D}{4} = 0$, 즉 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ 일 때,

이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a-1)=0$ 은 중근을 가지
므로 $f(a)=1$

(㉢) $\frac{D}{4} < 0$, 즉 $\frac{1}{2} < a < 1$ 일 때, 이차방정식

$ax^2+2(a-1)x-(a-1)=0$ 은 서로 다른 두 허근을 가
지므로 $f(a)=0$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a=0, a=\frac{1}{2}, a=1$

에서 불연속이므로 모든 실수 a 의 값의

$$\text{합은 } 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

답 ⑤

참고 (ii)의 (㉠) $\frac{D}{4} = (2a-1)(a-1) > 0$ 에서 $a < \frac{1}{2}$ 또는 $a > 1$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{1}{2}$ 또는 $a > 1$

- 13 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 각각 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이므로
최대·최소 정리에 의하여 두 함수 모두 이 구간에서 반드시 최댓
값과 최솟값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때,

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $\frac{3}{4}$ 을

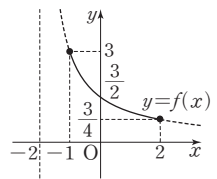
갖는다. $\therefore a = \frac{3}{4}$

또, $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $g(x) = -x^2 - x = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

은 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다. $\therefore b = \frac{1}{4}$

$$\therefore a+b = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

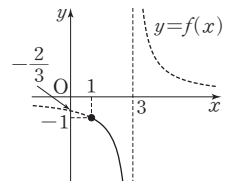
답 ①



- 14 함수 $f(x) = \frac{2}{x-3}$ 는 $x=3$ 에서 불연속이고, 그 이외의 x 의 값
에서는 연속이다.

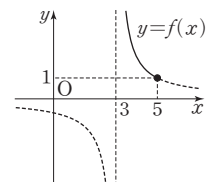
①, ②, ⑤ $f(x)$ 는 주어진 닫힌구간에서 연속이므로 최대·최소
정리에 의하여 주어진 구간에서 반드시 최댓값과 최솟
값을 갖는다.

③ $1 \leq x < 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$
에서 최댓값 -1 을 갖는다.



④ $3 < x \leq 5$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최댓값
은 없다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 존재하지
않는 구간은 ④ $(3, 5]$ 이다.



답 ④

- 15 ㄱ. $g_1(x) = f(x) - x^3$ 이라 하면 함수 $g_1(x)$ 는 열린구간
 $(-1, 1)$ 에서 연속이고

$$g_1(-1) = f(-1) - (-1) = -2 + 1 = -1 < 0,$$

$$g_1(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

이때 $g_1(-1)g_1(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식
 $g_1(x)=0$, 즉 $f(x)=x^3$ 은 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도
하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $g_2(x) = xf(x) - 1$ 이라 하면 $g_2(x)$ 는 열린구간 $(-1, 1)$ 에
서 연속이고

$$g_2(-1) = -f(-1) - 1 = -(-2) - 1 = 1 > 0,$$

$$g_2(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

이때 $g_2(-1)g_2(1) > 0$ 이므로 방정식 $g_2(x)=0$, 즉
 $xf(x)=1$ 이 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 실근을 갖는지는 알 수
없다.

ㄷ. $g_3(x) = xf(x) - x^3 - 2$ 라 하면 $g_3(x)$ 는 열린구간 $(-1, 1)$
에서 연속이고

$$g_3(-1) = -f(-1) - (-1) - 2 = -(-2) + 1 - 2 = 1 > 0,$$

$$g_3(1) = f(1) - 1 - 2 = 2 - 1 - 2 = -1 < 0$$

이때 $g_3(-1)g_3(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g_3(x) = 0$, 즉 $xf(x) = x^3 + 2$ 는 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 반드시 갖는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

16 $x^2 - 4 \neq 0$ 일 때,

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - 4ax - 4b}{x^2 - 4} = \frac{(ax+b)(x^2-4)}{x^2-4} = ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x = -2$, $x = 2$ 에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (ax+b) = -5$$

$$\therefore -2a+b = -5 \quad \dots\dots ㉠$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax+b) = 3$$

$$\therefore 2a+b = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = -1$

$$\therefore ab = 2 \times (-1) = -2 \quad \text{답 ①}$$

17 함수 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-a} & (x \neq a) \\ a-5 & (x = a) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면

$x = a$ 에서도 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, 즉

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = a-5 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$f(a) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

한편,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{g(x) - 3x\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x-a} - 3x \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^2 + 3ax}{x-a} = 3 \end{aligned}$$

에서 다항함수 $f(x) - 3x^2 + 3ax$ 는 최고차항의 계수가 3인 일차 함수이므로

$$f(x) - 3x^2 + 3ax = 3x + b \quad (b \text{는 상수})$$

라 하면

$$f(x) = 3x^2 + (3-3a)x + b$$

이때 $f(a) = 0$ 이므로

$$3a^2 + (3-3a)a + b = 0$$

$$3a^2 + 3a - 3a^2 + b = 0 \quad \therefore b = -3a$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + (3-3a)x - 3a$$

$$= 3(x+1)(x-a)$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x+1)(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} 3(x+1) = 3(a+1) = a-5 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 3a+3 = a-5, 2a = -8 \quad \therefore a = -4$$

따라서 $f(x) = 3(x+1)(x+4)$ 이므로

$$f(1) = 3 \times 2 \times 5 = 30 \quad \text{답 ③}$$

18 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = f(-1)g(-1) \quad \dots\dots ①$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x+3)(x^2+bx) = 2(-b+1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x)(x^2+bx) = -b+1,$$

$$f(-1)g(-1) = a \times 2 = 2a$$

이므로

$$2(-b+1) = -b+1 = 2a$$

$$2(-b+1) = -b+1 \text{에서 } -b+1 = 0 \quad \therefore b = 1 \quad \dots\dots ②$$

$$-b+1 = 2a \text{에서 } 0 = 2a \quad \therefore a = 0 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore a-b = 0-1 = -1 \quad \dots\dots ④$$

답 -1

채점기준	배점
① 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속일 조건 제시하기	1
② b 의 값 구하기	3
③ a 의 값 구하기	1
④ $a-b$ 의 값 구하기	1

19 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{2}$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$

이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad \dots\dots ①$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)g(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)g(x) = -g(1) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(1) = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)g(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)g(x) = g(2) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $g(x)$ 는 연속함수이고 ㉠, ㉡에서 $g(1)g(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ②

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x-1)(x-2)g(x)=0$ 은 닫힌구
간 $[1, 2]$ 에서 적어도 3개의 실근을 가지므로 $n=3$ ㉓

답 3

채점기준	배점
① $f(1)=0, f(2)=0$ 임을 설명하기	2
② $f(x)=(x-1)(x-2)g(x)$ 로 놓고 방정식 $g(x)=0$ 이 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 설명하기	3
③ n 의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.58~61

01 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$a+3=3a-5, 2a=8 \quad \therefore a=4$$

따라서 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a+3=4+3=7$ 이므로

$$a+f(1)=4+7=11$$

답 ②

02 함수 $f(x)g(x) = \frac{x^3+3x+5}{x^2+ax+9}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+ax+9 \neq 0$ 이어야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2+ax+9=0$ 의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4 \times 9=a^2-36 < 0$$

$$(a+6)(a-6) < 0 \quad \therefore -6 < a < 6$$

따라서 정수 a 는 $-5, -4, -3, \dots, 4, 5$ 의 11개이다.

답 ③

03 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ 이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (4x+k) = 4a+k,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} 2x^2 = 2a^2,$$

$$f(a) = 4a+k$$

$$\text{이므로 } 4a+k=2a^2 \quad \therefore 2a^2-4a-k=0 \quad \dots\dots ㉑$$

a 에 대한 이차방정식 ㉑의 실근이 존재해야 하므로 ㉑의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 2 \times (-k) = 4+2k \geq 0$$

$$2k \geq -4 \quad \therefore k \geq -2$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -2 이다.

답 ⑤

04 두 함수 $f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ 가 각각 $x=a$ 에서 연속이므로 두 함수

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\} + \frac{1}{2}\{f(x)-g(x)\},$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\} - \frac{1}{2}\{f(x)-g(x)\}$$

도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄱ. $\{f(x)\}^2=f(x) \times f(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

따라서 $x=a$ 에서 반드시 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

05 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이 되려면 $x=-1, x=1$ 에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x+b) = 1+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2+ax-2) = 1-a-2 = -a-1,$$

$$f(-1) = 1-a-2 = -a-1$$

에서

$$1+b = -a-1 \quad \therefore a+b = -2 \quad \dots\dots ㉑$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+ax-2) = 1+a-2 = a-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+b) = -1+b,$$

$$f(1) = 1+a-2 = a-1$$

에서

$$a-1 = -1+b \quad \therefore a-b = 0 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -1$$

$$\therefore a-2b = -1-2 \times (-1) = 1$$

답 ③

06 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ 이고, $-2 < x < 4$ 에서 $-2 \leq f(x) \leq 4$ 이므로 $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (참)

ㄴ. $a=-1, a=2, a=3$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는 실수 a ($-2 < a < 4$)는 3개이다. (참)

ㄷ. $f(x)$ 는 $x=-1, x=0, x=1, x=2, x=3$ 에서 불연속이므로 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속인 실수 a ($-2 < a < 4$)는 5개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

07 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, 즉

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2} = c \quad \dots\dots ㉑$$

㉑에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3+ax+b) = 0, 2a+b+8=0$$

$$\therefore b = -2a-8 \quad \dots\dots ㉒$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+ax-2a-8}{(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+a+4)}{(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+a+4}{x-2} = c \quad \dots\dots \textcircled{E}\end{aligned}$$

㉔에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+a+4) = 0, \quad 4+4+a+4=0$$

$$\therefore a = -12$$

$$a = -12 \text{를 } \textcircled{E} \text{에 대입하면}$$

$$b = 24 - 8 = 16$$

$$a = -12 \text{를 } \textcircled{E} \text{에 대입하면}$$

$$c = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+4) = 2+4=6$$

$$\therefore a+b+c = -12+16+6=10 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

08 $x < -1$ 일 때, $f(x) = x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 > 0$

$$x \geq -1 \text{일 때, } f(x) = 2 > 0$$

따라서 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이다. 또,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} 2 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2+2x+5) = 4$$

에서 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

이때 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x = -1$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{ax+3}{2} = \frac{-a+3}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{ax+3}{x^2+2x+5} = \frac{-a+3}{4},$$

$$\frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{-a+3}{2}$$

$$\text{에서 } \frac{-a+3}{2} = \frac{-a+3}{4}$$

$$-4a+12 = -2a+6, \quad -2a = -6 \quad \therefore a = 3 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

09 $(x^4+ax^2+b)f(x) = x^2-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

㉑의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$(16+4a+b)f(2) = 0, \quad 16+4a+b = 0 \quad (\because \text{조건 } \textcircled{1})$$

$$\therefore b = -4a-16$$

$x^4+ax^2+b \neq 0$ 일 때, ㉑에서

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^4+ax^2+b} = \frac{x^2-4}{x^4+ax^2-4a-16}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x^2+a+4)}$$

$$= \frac{1}{x^2+a+4}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x^2+a+4 \neq 0$ 이어야 한다. 즉,

$$a+4 > 0 \quad \therefore a > -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $a+b = a+(-4a-16) = -3a-16$ 이므로 $a+b$ 의 값이 최대가 되는 경우는 a 의 값이 최소일 때이다.

㉒에서 정수 a 의 최솟값은 -3 이므로 $a+b$ 의 최댓값은

$$-3 \times (-3) - 16 = -7 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

10 조건 ㉑에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-3x^2}{x} = f(1)$ 에서 극한값이 존재하고 분

모가 일차함수이므로 분자 $f(x)-3x^2$ 도 일차함수이다. 즉,

$$f(x)-3x^2 = ax+b \quad (a, b \text{는 정수})$$

$$\therefore f(x) = 3x^2+ax+b$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2+ax+b)-3x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{x} = a = f(1)$$

이므로

$$a = 3+a+b \quad \therefore b = -3$$

$$\therefore f(x) = 3x^2+ax-3$$

조건 ㉒에서 함수 $\frac{1}{f(x)+6}$, 즉 $\frac{1}{3x^2+ax+3}$ 이 실수 전체의 집

합에서 연속이므로 모든 실수 x 에 대하여 $3x^2+ax+3 \neq 0$ 이다. 즉, 이차방정식 $3x^2+ax+3=0$ 이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4 \times 3 \times 3 < 0, \quad a^2 - 36 < 0$$

$$(a+6)(a-6) < 0 \quad \therefore -6 < a < 6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이때 $f(2) = 12+2a-3 = 2a+9$ 이므로 $f(2)$ 의 값이 최대가 되는 경우는 a 의 값이 최대일 때이다.

㉓에서 정수 a 의 최댓값은 5 이므로 $f(2)$ 의 최댓값은

$$2 \times 5 + 9 = 19 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이

다.

한편, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = k$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x+a) \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a) = a+1 = k$$

$$\therefore a = k-1$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x+k-1)$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = f(2)g(2)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-1)(x+k-1)(2-x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x-1)(x+k-1)(x+1) \\ = 1 \times (k+1) \times 3 = 3(k+1),$$

$$f(2)g(2) = (k+1) \times 3 = 3(k+1)$$

에서

$$0 = 3(k+1) \quad \therefore k = -1$$

답 ②

- 12 원 $x^2 + y^2 = t^2$ ($t \neq 0$)은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|t|$ 인 원이므로

$$f(t) = \begin{cases} 2 & (|t| > 2) \\ 1 & (|t| = 2) \\ 0 & (0 < |t| < 2) \end{cases} = \begin{cases} 2 & (t < -2 \text{ 또는 } t > 2) \\ 1 & (t = \pm 2) \\ 0 & (-2 < t < 0 \text{ 또는 } 0 < t < 2) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = -2$,

$t = 2$ 에서 불연속이므로 함수

$(x-a)f(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에

서 연속하려면 $x=2$ 에서 연속이

면 된다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (x-a)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x-a)f(x) = (2-a)f(2)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (x-a)f(x) = (2-a) \times 2 = 2(2-a),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} (x-a)f(x) = (2-a) \times 0 = 0,$$

$$(2-a)f(2) = (2-a) \times 1 = 2-a$$

에서

$$2(2-a) = 2-a = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore f(2) + a = 1 + 2 = 3$$

답 ⑤

- 13 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (4x+a) = a+4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2-1) = 0,$$

$$f(1) = 0$$

이므로

$$a+4 = 0 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (x \leq 1) \\ 4x-4 & (x > 1) \end{cases}$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같다.

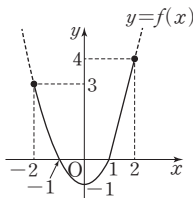
따라서 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 4,

$x=0$ 에서 최솟값 -1 을 가지므로

$$M=4, m=-1$$

$$\therefore Mm = 4 \times (-1) = -4$$

답 ③



- 14 $f(x) = x^3 + 2x - 4$ 라 하면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속

이고

$$f(-3) = -27 - 6 - 4 = -37 < 0$$

$$f(-2) = -8 - 4 - 4 = -16 < 0$$

$$f(-1) = -1 - 2 - 4 = -7 < 0$$

$$f(0) = -4 < 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - 4 = -1 < 0$$

$$f(2) = 8 + 4 - 4 = 8 > 0$$

$$f(3) = 27 + 6 - 4 = 29 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) = 0$ 의 실근이 존재하는 구간은 ④ $(1, 2)$ 이다.

답 ④

- 15 ㄱ. $g_1(x) = f(x) - x$ 라 하면 $g_1(x)$ 는 열린구간 $(1, 2)$ 에서 연

속이고

$$g_1(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$g_1(2) = f(2) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

이때 $g_1(1)g_1(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$g_1(x) = 0$, 즉 $f(x) - x = 0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도

하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $g_2(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ 이라 하면 $g_2(x)$ 는 열린구간 $(1, 2)$ 에서

연속이고

$$g_2(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$g_2(2) = f(2) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

이때 $g_2(1)g_2(2) > 0$ 이므로 방정식 $g_2(x) = 0$, 즉

$f(x) - \frac{1}{x} = 0$ 이 열린구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖는지는 알 수 없다.

ㄷ. $g_3(x) = f(f(x))$ 라 하면 $g_3(x)$ 는 열린구간 $(1, 2)$ 에서 연

속이고

$$g_3(1) = f(f(1)) = f(2) = 1 > 0,$$

$$g_3(2) = f(f(2)) = f(1) = 2 > 0$$

이때 $g_3(1)g_3(2) > 0$ 이므로 방정식 $g_3(x) = 0$, 즉

$f(f(x)) = 0$ 이 열린구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖는지는 알 수 없다.

따라서 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 반드시 갖는 방정식은 ㄱ이다.

답 ①

- 16 함수 $f(x)$ 가 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $f(x) + 1$

과 함수 $f(x) - 1$ 도 $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속하려면 $x=0$ 에서 연

속이면 된다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + 1\} \{f(x) - 1\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} (x+a+1)(x+a-1)$$

$$= (a+1)(a-1) = a^2 - 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + 1\} \{f(x) - 1\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-a+1)(x-a-1) \\
&= (-a+1)(-a-1) = a^2 - 1, \\
g(0) &= \{f(0)+1\} \{f(0)-1\} = (4+1) \times (4-1) = 15 \\
\text{에서 } a^2 - 1 &= 15, a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 ④}
\end{aligned}$$

- 17** $x^2f(x) = 3x + 4$ 에서 $x^2f(x) - 3x - 4 = 0$
 $g(x) = x^2f(x) - 3x - 4$ 라 하면 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 도 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고
 $g(-2) = 4f(-2) + 6 - 4 = 4 \times 2 + 6 - 4 = 10 > 0$,
 $g(0) = -4 < 0$,
 $g(1) = f(1) - 3 - 4 = 8 - 3 - 4 = 1 > 0$
따라서 $g(-2)g(0) < 0$, $g(0)g(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린구간 $(-2, 0)$, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 각각 적어도 한 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $x^2f(x) = 3x + 4$ 는 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.
 $\therefore n = 2$ 답 ②

- 18** 조건 (가)에서 $f(-1)g(-1) = 0$ 이므로 조건 (나)에서
 $f(-1) \times 2 = 0 \quad \therefore f(-1) = 0$ ①
따라서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를
 $f(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)
로 놓으면 조건 (가)에서
 $(x+1)(x^2+ax+b)g(x) = (x+1)(x+5)$
즉, $x \neq -1$, $x^2+ax+b \neq 0$ 일 때,
 $g(x) = \frac{x+5}{x^2+ax+b}$
이때 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
모든 실수 x 에 대하여 $x^2+ax+b \neq 0$ 이다. 즉, 이차방정식
 $x^2+ax+b=0$ 의 실근이 존재하지 않으므로 이 이차방정식의 판
별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 4b < 0$ ㉠
또, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$ 이어야 하므로
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+5}{x^2+ax+b} = 2, \frac{4}{1-a+b} = 2$
 $1-a+b=2 \quad \therefore a=b-1$ ㉡ ②
이때 $f(0) = b$, $g(0) = \frac{5}{b}$ 가 모두 정수이므로
 $b = -5, -1, 1, 5$ ㉢ ③
㉡, ㉢에서 $\begin{cases} a=-6 \\ b=-5 \end{cases}, \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}, \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$ 이고, 이 중에
서 ㉠을 만족시키는 것은
 $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$ ④
따라서 $f(x) = (x+1)(x^2+1)$ 또는
 $f(x) = (x+1)(x^2+4x+5)$ 이므로 $f(1)$ 의 최댓값은
 $(1+1) \times (1+4+5) = 20$ ⑤
답 20

채점기준	배점
① $f(-1)$ 의 값 구하기	1
② a, b 에 대한 부등식과 등식 세우기	2
③ b 의 값이 될 수 있는 수 구하기	1
④ a, b 의 값이 될 수 있는 수 구하기	2
⑤ $f(1)$ 의 최댓값 구하기	1

- 19** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \geq 0) \\ -x - 3 & (x < 0) \end{cases}$ 에서
 $f(x-a) = \begin{cases} (x-a)^2 - 4(x-a) + 3 & (x-a \geq 0) \\ -(x-a) - 3 & (x-a < 0) \end{cases}$
 $= \begin{cases} (x-a)^2 - 4(x-a) + 3 & (x \geq a) \\ -(x-a) - 3 & (x < a) \end{cases}$
함수 $f(x)f(x-a)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$,
 $x=a$ 에서 각각 연속이면 된다.
(i) $a > 0$ 일 때
 $f(x)f(x-a) = \begin{cases} (x^2 - 4x + 3) \{ (x-a)^2 - 4(x-a) + 3 \} & (x \geq a) \\ (x^2 - 4x + 3) \{ -(x-a) - 3 \} & (0 \leq x < a) \\ (-x - 3) \{ -(x-a) - 3 \} & (x < 0) \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)f(x-a) = f(0)f(-a)$
에서
 $3(a-3) = -3(a-3) = 3(a-3)$
즉, $6(a-3) = 0$ 이므로
 $a = 3$
또,
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)f(x-a) = f(a)f(0)$ 에서
 $3(a^2 - 4a + 3) = -3(a^2 - 4a + 3) = 3(a^2 - 4a + 3)$
즉, $6(a^2 - 4a + 3) = 0$ 이므로
 $(a-1)(a-3) = 0$
 $\therefore a = 1$ 또는 $a = 3$
따라서 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=0$, $x=a$ 에서 동시에 연속
이려면
 $a = 3$ ①
(ii) $a = 0$ 일 때
 $f(x)f(x-a) = \{f(x)\}^2 = \begin{cases} (x^2 - 4x + 3)^2 & (x \geq 0) \\ (-x - 3)^2 & (x < 0) \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{f(x)\}^2 = \{f(0)\}^2$ 에서
 $3^2 = (-3)^2 = 3^2$ 이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 모든 실수 x 에서 연
속이다.
 $\therefore a = 0$ ②
(iii) $a < 0$ 일 때
 $f(x)f(x-a) = \begin{cases} (x^2 - 4x + 3) \{ (x-a)^2 - 4(x-a) + 3 \} & (x \geq 0) \\ (-x - 3) \{ (x-a)^2 - 4(x-a) + 3 \} & (a \leq x < 0) \\ (-x - 3) \{ -(x-a) - 3 \} & (x < a) \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)f(x-a) = f(0)f(-a)$ 에서

$$3(a^2+4a+3)=-3(a^2+4a+3)=3(a^2+4a+3)$$

$$\text{즉, } 6(a^2+4a+3)=0 \text{ 이므로}$$

$$(a+3)(a+1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=-1$$

또,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = f(a)f(0) \text{에서}$$

$$3(-a-3)=-3(-a-3)=3(-a-3)$$

$$\text{즉, } 6(-a-3)=0 \text{ 이므로 } a=-3$$

따라서 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=0$, $x=a$ 에서 동시에 연속
이려면

$$a=-3$$

..... ③

(i), (ii), (iii)에서

$$a=3, a=0, a=-3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$3+0+(-3)=0$$

..... ④

답 0

채점기준	배점
① $a>0$ 일 때 a 의 값 구하기	3
② $a=0$ 일 때 함수 $f(x)f(x-a)$ 의 연속성 확인하기	1
③ $a<0$ 일 때 a 의 값 구하기	2
④ 모든 a 의 값의 합 구하기	1

다른풀이 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=a$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = f(a)f(0)$$

이어야 한다.

$x-a=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow a+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$, $x \rightarrow a-$ 일 때
 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a+} f(x-a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \times 3 \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) &= \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a-} f(x-a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \times (-3) \\ &= -3 \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \end{aligned}$$

$$f(a)f(0)=f(a) \times 3=3f(a)$$

따라서 $3 \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -3 \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = 3f(a)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = - \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) \quad \text{..... ⑦}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과
같으므로 ⑦을 만족시키는 경우는 다음과
같다.

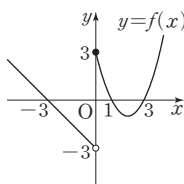
(i) 함수 $f(x)$ 가 연속일 때

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) \text{이고,}$$

$$\text{⑦에서 } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) = 0 \text{ 이어야 한다. 즉,}$$

$$a=-3, a=1, a=3$$



(ii) 함수 $f(x)$ 가 불연속일 때

$$a=0 \text{ 일 때, } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -3, f(0) = 3 \text{ 이므로}$$

로 ⑦을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-3, 1, 3, 0$

같은 방법으로 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되도록
하는 실수 a 의 값은 $-3, -1, 3, 0$

따라서 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도
록 하는 실수 a 의 값은 $-3, 3, 0$ 이므로 모든 실수 a 의 값의 합은
 $-3+3+0=0$

수능형 기출문제 & 변형문제

p.62~64

1 함수 $|f(x)|$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| = |f(-1)|$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1-} |x+a| = |-1+a|,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1+} |x| = |-1|=1,$$

$$|f(-1)| = |-1|=1$$

이므로

$$|-1+a|=1, -1+a=\pm 1$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=0$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=2$

또, 함수 $|f(x)|$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3+} |f(x)| = |f(3)|$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3-} |x| = |3|=3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3+} |bx-2| = |3b-2|,$$

$$|f(3)| = |3b-2|$$

이므로

$$|3b-2|=3, 3b-2=\pm 3$$

$$3b=5 \text{ 또는 } 3b=-1$$

$$\therefore b=\frac{5}{3} \text{ 또는 } b=-\frac{1}{3}$$

$$\text{그런데 } b>0 \text{ 이므로 } b=\frac{5}{3}$$

$$\therefore a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$$

답 ⑤

2 $f(0)=2$ 이므로 $b=2$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x+a & (x \leq -2) \\ -x^2+2 & (-2 < x \leq 2) \\ cx+1 & (x > 2) \end{cases}$$

함수 $|f(x)|$ 가 $x=-2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -2+} |f(x)| = |f(-2)|$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -2-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -2-} |x+a| = |-2+a|,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -2+} |-x^2+2| = |-4+2| = |-2| = 2,$$

$$|f(-2)| = |-2+a|$$

이므로

$$|-2+a|=2, -2+a=\pm 2$$

$$\therefore a=4 \text{ 또는 } a=0$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=4$

또, 함수 $|f(x)|$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2+} |f(x)| = |f(2)|$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2-} |-x^2+2| = |-4+2| = |-2| = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2+} |cx+1| = |2c+1|,$$

$$|f(2)| = |-4+2| = |-2| = 2$$

이므로

$$|2c+1|=2, 2c+1=\pm 2$$

$$2c=1 \text{ 또는 } 2c=-3$$

$$\therefore c=\frac{1}{2} \text{ 또는 } c=-\frac{3}{2}$$

그런데 $c>0$ 이므로 $c=\frac{1}{2}$

$$\therefore abc=4 \times 2 \times \frac{1}{2}=4$$

답 ③

- 3 이차함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 불연속이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이라면 $x=-1, x=1$ 에서 연속이어야 한다.

함수 $h(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = h(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x)$$

$$= 0 \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x)$$

$$= (-1) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x)$$

$$= -g(-1) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수}),$$

$$h(-1) = f(-1)g(-1)$$

$$= (-1) \times g(-1) = -g(-1)$$

이므로

$$-g(-1)=0 \quad \therefore g(-1)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = h(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$= 1 \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$= g(1) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

$$= 2 \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

$$= 2g(1) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수}),$$

$$h(1) = f(1)g(1) = 2g(1)$$

이므로

$$2g(1)=g(1) \quad \therefore g(1)=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$\therefore g(5) = 25 - 1 = 24$$

답 24

- 4 삼차함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=3$ 에서 불연속이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 가 구간 $(0, 4)$ 에서 연속이라면 $x=1, x=3$ 에서 연속이어야 한다.

함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = h(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$= 3 \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$= 3g(1) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

$$= 1 \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

$$= g(1) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수}),$$

$$h(1) = f(1)g(1) = 1 \times g(1) = g(1)$$

이므로

$$3g(1)=g(1), 2g(1)=0 \quad \therefore g(1)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 함수 $h(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow 3-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} h(x) = h(3)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3-} g(x)$$

$$= 1 \times \lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = g(3) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 3+} g(x)$$

$$= 0 \times \lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = 0,$$

$$h(3) = f(3)g(3) = 1 \times g(3) = g(3)$$

$$\text{이므로 } g(3)=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = (x-1)(x-3)(x+k) \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓으면 $g(0)=3$ 에서

$$-1 \times (-3) \times k = 3 \quad \therefore k=1$$

따라서 $g(x) = (x-1)(x-3)(x+1)$ 이므로

$$g(4) = 3 \times 1 \times 5 = 15$$

답 15

- 5 $\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$ 에서

$$\{f(x)\}^2 \{f(x)-1\} - x^2 \{f(x)-1\} = 0$$

$$[\{f(x)\}^2 - x^2] \{f(x)-1\} = 0$$

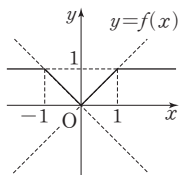
$$\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}\{f(x)-1\}=0$$

$$\therefore f(x)=-x \text{ 또는 } f(x)=x \text{ 또는 } f(x)=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 세 직선 $y=-x$,

$y=x$, $y=1$ 을 그리고, 연속함수 $f(x)$ 의
최댓값이 1, 최솟값이 0이 되도록

$y=f(x)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림
과 같다.



$$\therefore f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

6 $\{f(x)\}^3+2\{f(x)\}^2-x^2f(x)-2x^2=0$ 에서

$$\{f(x)\}^2\{f(x)+2\}-x^2\{f(x)+2\}=0$$

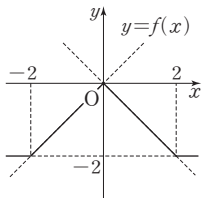
$$[\{f(x)\}^2-x^2]\{f(x)+2\}=0$$

$$\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}\{f(x)+2\}=0$$

$$\therefore f(x)=-x \text{ 또는 } f(x)=x \text{ 또는 } f(x)=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 세 직선 $y=-x$, $y=x$, $y=-2$

를 그리고, 연속함수 $f(x)$ 의 최댓값이
0, 최솟값이 -2 가 되도록 $y=f(x)$ 의
그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore f(-3)+f(0)+f(1)$$

$$=-2+0+(-1)=-3$$

답 ③

II 미분

1 미분계수와 도함수

교과서 예제

p.67

01 (1) $f(-1)=2+1=3$, $f(1)=-2+1=-1$ 이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

(2) $f(-1)=1-3=-2$, $f(1)=1-3=-2$ 이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{-2-(-2)}{2} = 0$$

답 (1) -2 (2) 0

02 (1) $f(-2)=8-2=6$, $f(-1)=2-1=1$ 이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{1-6}{1} = -5$$

(2) $f(-1)=2-1=1$, $f(1)=2+1=3$ 이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{3-1}{2} = 1$$

답 (1) -5 (2) 1

03 (1) $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(1+\Delta x)-3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4$$

(2) $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8(1+\Delta x)^2-8}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8(\Delta x)^2+16\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8\Delta x+16) = 16$$

답 (1) 4 (2) 16

다른풀이 (1) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x-3)-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)}{x-1} = 4$$

(2) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x^2-8}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \{8(x+1)\} = 16$$

04 (1) $f(x)=3x^2+x$ 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의
접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$
과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{3(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x)\} - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(\Delta x)^2 + 7\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3\Delta x + 7) = 7 \end{aligned}$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 7이다.

- (2) $f(x) = -x^3 + 1$ 이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 미분계수 $f'(-1)$ 과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(-1+\Delta x)^3 + 1\} - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{- (\Delta x)^2 + 3\Delta x - 3\} = -3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 -3이다.

답 (1) 7 (2) -3

다른풀이 (1) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 + x) - 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+4)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (3x+4) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-x^3 + 1) - 2}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \{-(x^2 - x + 1)\} = -3 \end{aligned}$$

- 05 (i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \boxed{0}$, $f(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 **연속**이다.

(ii) $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = \boxed{1}$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = \boxed{-1}$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 **미분가능하지 않다**.

답 (가) 0 (나) 연속 (다) 1 (라) -1 (마) 미분가능하지 않다

06 $f(x) = |x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)|$

$$= \begin{cases} (x+2)(x-2) & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -(x+2)(x-2) & (-2 < x < 2) \end{cases}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+2)(x-2) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x+2)(x-2) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x+2)\} = -4$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{이므로 } f(x) \text{는 } x=2 \text{에서 미분가능하지 않다.}$$

답 (1) 4 (2) -4 (3) 미분가능하지 않다.

07 (1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5-5}{h} = 0$

$$(2) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)+2\} - (x+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\begin{aligned} (3) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-(x+h)^2 - 2\} - (-x^2 - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h) = -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 + 1\} - (x^3 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

답 (1) $f'(x) = 0$ (2) $f'(x) = 1$ (3) $f'(x) = -2x$ (4) $f'(x) = 3x^2$

08 함수 $\frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{2}g(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$\frac{2}{3}f'(2) - \frac{1}{2}g'(2) = \frac{2}{3} \times 3 - \frac{1}{2} \times (-2) = 3$$

답 3

09 (2) $y' = (-x+2)' = (-x)' + (2)'$

$$= -(x)' + (2)' = -1 + 0 = -1$$

$$(3) y' = (3x^2 + 2x + 1)' = (3x^2)' + (2x)' + (1)' = 3(x^2)' + 2(x)' + (1)' = 3 \times 2x + 2 + 0 = 6x + 2$$

$$\begin{aligned} (4) y' &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 1\right)' \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left(\frac{5}{2}x^2\right)' + (1)' \\ &= \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' + (1)' \\ &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{5}{2} \times 2x + 0 = x^2 - 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) y' &= \{(x^2 - 3x)(x^2 + 1)\}' \\ &= (x^2 - 3x)'(x^2 + 1) + (x^2 - 3x)(x^2 + 1)' \\ &= (2x - 3)(x^2 + 1) + (x^2 - 3x) \times 2x \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 + 2x^3 - 6x^2 \\ &= 4x^3 - 9x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) y' &= \{x(x+1)(x+2)\}' \\
 &= x'(x+1)(x+2) + x(x+1)'(x+2) + x(x+1)(x+2)' \\
 &= (x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1) \\
 &= x^2 + 3x + 2 + x^2 + 2x + x^2 + x = 3x^2 + 6x + 2
 \end{aligned}$$

답 (1) $y'=0$ (2) $y'=-1$ (3) $y'=6x+2$ (4) $y'=x^2-5x$
 (5) $y'=4x^3-9x^2+2x-3$ (6) $y'=3x^2+6x+2$

참고 미분가능한 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}
 \{f(x)g(x)h(x)\}' &= [\{f(x)g(x)\}h(x)]' \\
 &= \{f(x)g(x)\}'h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\
 &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}h(x) \\
 &\quad + f(x)g(x)h'(x) \\
 &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) \\
 &\quad + f(x)g(x)h'(x)
 \end{aligned}$$

기출 Best | 1회

p.68~71

- 01 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}
 \frac{f(3)-f(1)}{3-1} &= \frac{(9+3a+7)-(1+a+7)}{2} \\
 &= \frac{2a+8}{2} = a+4
 \end{aligned}$$

따라서 $a+4=5$ 이므로 $a=1$

답 ④

- 02 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{(a^2+2a+2)-2}{a} = \frac{a^2+2a}{a} = a+2$$

또, 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(1+h)^2+2(1+h)+2\}-5}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+4) = 4
 \end{aligned}$$

따라서 $a+2=4$ 이므로 $a=2$

답 ②

03 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h} \times (-3) \right]$

$$= -3f'(2) = -3 \times 3 = -9$$

답 ①

04 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right]$

$$= f'(2) \times \frac{1}{4} = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

답 ③

05 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x)-xf(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3\{f(x)-f(3)\} - (x-3)f(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ 3 \times \frac{f(x)-f(3)}{x-3} - f(3) \right\}$$

$$= 3f'(3) - f(3) = 3 \times 6 - 7 = 11$$

답 ②

06 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(1+\frac{2}{n}\right) - f\left(1-\frac{1}{n}\right) \right\} = 6$ 에서 $\frac{1}{n}=h$ 로 놓으면

$n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(1+\frac{2}{n}\right) - f\left(1-\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} - \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$= f'(1) + \frac{1}{2}f'(1)$$

$$= \frac{3}{2}f'(1)$$

$$\text{즉, } \frac{3}{2}f'(1) = 6 \text{이므로 } f'(1) = 4$$

답 ②

- 07 ㄱ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 1보다 크므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$$

$$\therefore f(b)-f(a) > b-a \quad (\because b-a > 0) \text{ (거짓)}$$

- ㄴ. 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$$f'(a) < f'(b) \text{ (참)}$$

- ㄷ. 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$$f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

- 08 ①, ② 다항함수이므로 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

- ③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} h = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-h) = 0$$

$$\text{이므로 } f'(0) = 0$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

- ④ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{3h}{h} = 3,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-3h}{h} = -3$$

이므로 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

- ⑤ $y = \frac{3}{x}$ 은 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이고

미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ④이다.

답 ④

- 09 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = -1$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (2x+b) = -2+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x^2+ax+1) = -1-a+1 = -a,$$

$$f(-1) = -2+b$$

이므로

$$-2+b = -a \quad \therefore b = -a+2$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -x^2+ax+1 & (x < -1) \\ 2x-a+2 & (x \geq -1) \end{cases}$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{2x-a+2-(-a)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-x^2+ax+1-(-a)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(-x+1+a)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (-x+1+a) \\ &= 1+1+a = a+2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2 = a+2 \quad \therefore a = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & (x < -1) \\ 2x+2 & (x \geq -1) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$f(0) = 2, f(-2) = -4+1 = -3$$

$$\therefore f(0)+f(-2) = 2+(-3) = -1$$

답 ②

$$\begin{aligned} 10 \quad f'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^5-x^5}{t-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-x)(t^4+t^3x+t^2x^2+tx^3+x^4)}{t-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} (t^4+t^3x+t^2x^2+tx^3+x^4) = 5x^4 \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{7} t-x \quad \textcircled{4} t-x \quad \textcircled{2} 5x^4$$

답 ①

- 11 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 6xy - 2$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 0 - 2 \quad \therefore f(0) = 2$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)-6xh-2\}-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-6xh-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-2}{h} - 6x \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h-0} - 6x \right\}$$

$$= f'(0) - 6x = -6x + 3$$

답 ②

다른풀이 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 6xy - 2$ 의 양변에 $x=0,$

$y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 0 - 2 \quad \therefore f(0) = 2$$

$f(x+y) - f(x) = f(y) - 6xy - 2$ 의 양변을 y 로 나누면

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)-2}{y} - 6x$$

이므로

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(y)-f(0)}{y} - 6x \right\}$$

$$\therefore f'(x) = f'(0) - 6x = -6x + 3$$

- 12 $f(1) = 3$ 이므로

$$1+a+b=3 \quad \therefore b = -a+2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(x) = x^2+ax+b \text{에서 } f'(x) = 2x+a$$

$$f'(3) = 6 \text{이므로}$$

$$6+a=6 \quad \therefore a=0$$

$$a=0 \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } b=2$$

$$\therefore a-b = 0-2 = -2$$

답 ②

- 13 $f'(x)$

$$= \{(x^2-x+1)(x^3+x^2-x-1)\}'$$

$$= (x^2-x+1)'(x^3+x^2-x-1) + (x^2-x+1)(x^3+x^2-x-1)'$$

$$= (2x-1)(x^3+x^2-x-1) + (x^2-x+1)(3x^2+2x-1)$$

이므로

$$f'(1) = 1 \times 0 + 1 \times 4 = 4$$

답 ⑤

- 14 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 5$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-3\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = 5$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = 2 \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 1 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)+1\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$$

$$\therefore g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1 \quad (\because g(x) \text{는 연속함수})$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) \text{이므로}$$

$$g'(1) = 2$$

$$h(x) = f(x)g(x) \text{라 하면 } h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

따라서 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

$$= 5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$$

답 ③

$$\begin{aligned} 15 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x^3) - f(1)\}(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times (x^2 + x + 1) \right\} \\ &= 3f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$f'(1) = 3 - 4 + 3 = 2$$

따라서 구하는 값은

$$3f'(1) = 3 \times 2 = 6$$

답 ④

16 $x + 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+1) - 5}{x^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 5}{(t-1)^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 5}{t(t-2)} = 4$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 5}{t(t-2)} = 4 \text{에서 극한값이 존재하고 } t \rightarrow 0 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{f(t) - 5\} = 0 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 5$$

$\therefore f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 5$ ($\therefore f(t)$ 는 연속함수)

$$\therefore b = 5$$

이때

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 5}{t(t-2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \times \frac{1}{t-2} \right\} = -\frac{1}{2}f'(0)$$

$$\text{이므로 } -\frac{1}{2}f'(0) = 4 \quad \therefore f'(0) = -8$$

$$f'(x) = 15x^4 + 12x^2 + 4x + a \text{에서 } f'(0) = a = -8$$

$$\therefore a + b = -8 + 5 = -3$$

답 ②

17 $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^8$ 이라 하면 $f(1) = 8$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^8 - 8}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이때 $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 8x^7$ 이므로

$$f'(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36$$

답 ④

18 $f(x) = x^3 + ax + b$ 라 하면 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(-1, 4)$ 를 지나

므로 $f(-1) = 4$ 에서

$$-1 - a + b = 4 \quad \therefore b = a + 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(x) = x^3 + ax + b \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + a$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, 4)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 1이므로 접선의 기울기는 -1 이다.

$$\text{즉, } f'(-1) = -1 \text{이므로 } 3 + a = -1 \quad \therefore a = -4$$

$$a = -4 \text{를 } ㉠ \text{에 대입하면 } b = -4 + 5 = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16 + 1 = 17$$

답 ③

19 $f(x)$ 가 상수함수이면 $f'(x) = 0$ 이므로

$$f(x)f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + kx + 6 \text{에서}$$

$$0 = 2x^3 - 9x^2 + kx + 6$$

이 등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립하지는 않으므로 $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

다항식 $f(x)$ 를 n 차식이라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차식이므로

좌변의 $f(x)f'(x)$ 는 $n + (n-1) = (2n-1)$ 차식이다.

이때 우변이 삼차식이므로

$$2n-1=3, 2n=4 \quad \therefore n=2$$

즉, $f(x)$ 는 이차식이고, 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\text{라 하면 } f'(x) = 2x + a$$

$$f(x)f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + kx + 6 \text{에서}$$

$$(x^2 + ax + b)(2x + a) = 2x^3 - 9x^2 + kx + 6$$

$$\therefore 2x^3 + 3ax^2 + (a^2 + 2b)x + ab = 2x^3 - 9x^2 + kx + 6$$

이 등식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$3a = -9, a^2 + 2b = k, ab = 6$$

$$\therefore a = -3, b = -2, k = 5$$

따라서 $f(x) = x^2 - 3x - 2$ 이므로

$$f(1) = 1 - 3 - 2 = -4$$

$$\therefore k + f(1) = 5 + (-4) = 1$$

답 ①

20 $f(x) = x^3 - 12x + a$ 라 하면 $f(x)$ 가 $(x-b)^2$ 으로 나누어떨어지

므로 $f(b) = 0, f'(b) = 0$

$$f(b) = 0 \text{에서 } b^3 - 12b + a = 0$$

$$\therefore a = -b^3 + 12b \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \text{이므로 } f'(b) = 0 \text{에서}$$

$$3b^2 - 12 = 0, b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

$$b = 2 \text{를 } ㉠ \text{에 대입하면 } a = -8 + 24 = 16$$

$$\therefore a + b = 16 + 2 = 18$$

답 ⑤

다른풀이 다항식 $x^3 - 12x + a$ 를 $(x-b)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3 - 12x + a = (x-b)^2 Q(x) \quad \dots\dots ㉡$$

$x = b$ 를 ㉡의 양변에 대입하면

$$b^3 - 12b + a = 0 \quad \therefore a = -b^3 + 12b \quad \dots\dots ㉢$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - 12 = 2(x-b)Q(x) + (x-b)^2 Q'(x) \quad \dots\dots ㉣$$

$x = b$ 를 ㉣의 양변에 대입하면

$$3b^2 - 12 = 0, b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

$$b = 2 \text{를 } ㉢ \text{에 대입하면 } a = -8 + 24 = 16$$

$$\therefore a + b = 16 + 2 = 18$$

참고 다항식 $f(x)$ 가 $(x-a)^2$ (a 는 상수)으로 나누어떨어지면

$$f(a) = 0, f'(a) = 0$$

21 다항식 $x^5 + ax + b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라

하면 나머지가 $-3x + 1$ 이므로

$$x^5 + ax + b = (x+1)^2 Q(x) - 3x + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$x = -1$ 을 ㉠의 양변에 대입하면

$$-1 - a + b = 3 + 1 \quad \therefore b = a + 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$5x^4 + a = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) - 3 \quad \dots\dots ㉢$$

$x = -1$ 을 ㉔의 양변에 대입하면

$$5 + a = -3 \quad \therefore a = -8$$

$a = -8$ 을 ㉔에 대입하면 $b = -8 + 5 = -3$

$$\therefore a + b = -8 + (-3) = -11$$

답 ⑤

기출 Best | 2회

p.72~75

- 01 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{(4a - 4 + 3) - (a - 2 + 3)}{1} = 3a - 2$$

따라서 $3a - 2 = 4$ 이므로

$$3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

답 ②

- 02 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(9 + 6 + 3) - 3}{3} = 5$$

또, 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(a+h)^2 + 2(a+h) + 3\} - (a^2 + 2a + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2ah + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2a + 2) = 2a + 2 \end{aligned}$$

따라서 $5 = 2a + 2$ 이므로

$$2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

답 ②

03 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a+3h)}{3h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \{f(a+3h) - f(a)\}}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \frac{1}{3} - \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \right\} \\ &= \frac{1}{3} f'(a) - f'(a) = -\frac{2}{3} f'(a) \\ &= -\frac{2}{3} \times 3 = -2 \end{aligned}$$

답 ①

다른풀이 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a+3h)}{3h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a+3h)}{(a+h) - (a+3h)} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \right\} \\ &= -\frac{2}{3} f'(a) = -\frac{2}{3} \times 3 = -2 \end{aligned}$$

04 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} \\ &= f'(1) \times \frac{1}{3} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

05 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9f(x) - x^2 f(3)}{x-3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9f(x) - 9f(3) + 9f(3) - x^2 f(3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9\{f(x) - f(3)\} - (x+3)(x-3)f(3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \times 9 - (x+3)f(3) \right\} \\ &= 9f'(3) - 6f(3) = -9 - 6f(3) \end{aligned}$$

이므로

$$-9 - 6f(3) = 9$$

$$-6f(3) = 18 \quad \therefore f(3) = -3$$

답 ①

06 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} \left\{ f\left(2 + \frac{3}{n}\right) - f\left(2 - \frac{2}{n}\right) \right\} = 20$ 에서 $\frac{1}{n} = h$ 로 놓으면

$n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} \left\{ f\left(2 + \frac{3}{n}\right) - f\left(2 - \frac{2}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+3h) - f(2-2h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+3h) - f(2) - \{f(2-2h) - f(2)\}}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} - \frac{f(2-2h) - f(2)}{-2h} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \right\} \\ &= f'(2) + \frac{2}{3} f'(2) = \frac{5}{3} f'(2) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{5}{3} f'(2) = 20 \quad \therefore f'(2) = 12$$

답 ①

- 07 ㄱ. 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$f'(b) < f'(a) < 0$$

이때 $0 < a < b < 1$ 이므로

$$\frac{f'(b)}{a} < \frac{f'(b)}{b} < \frac{f'(a)}{b} \quad (\text{참})$$

- ㄴ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(b) \quad (\text{거짓})$$

- ㄷ. $0 < a < b$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

이때 $a < \frac{a+b}{2} < b$, $a < \sqrt{ab} < b$ 이고 열린구간 (a, b) 에 속

하는 x 의 값이 커질수록 그 점에서의 접선의 기울기는 감소하므로

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) < f'(\sqrt{ab}) \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

- 08 ① 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 은 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 볼 연속이고 미분가능하지 않다.

② 함수 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서

불연속이고 미분가능하지 않다.

③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} 2h = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-2h) = 0$$

이므로 $f'(0) = 0$

즉, $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

④ 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2 - 3h + 2) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 - 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h - 3) = -3,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(h^2 + 3h + 2) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} (h + 3) = 3$$

이므로 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

09 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (5x^2 + 2x + b) = 5 + 2 + b = b + 7,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax - 2) = a - 2,$$

$$f(1) = 5 + 2 + b = b + 7$$

$$\text{이므로 } b + 7 = a - 2 \quad \therefore b = a - 9$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} ax - 2 & (x < 1) \\ 5x^2 + 2x + a - 9 & (x \geq 1) \end{cases}$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(5x^2 + 2x + a - 9) - (a - 2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(5x + 7)(x - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} (5x + 7) = 5 + 7 = 12,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{ax - 2 - (a - 2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a$$

이므로 $a = 12$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 12x - 2 & (x < 1) \\ 5x^2 + 2x + 3 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-2) = -24 - 2 = -26, f(2) = 20 + 4 + 3 = 27$$

$$\therefore f(-2) + f(2) = -26 + 27 = 1$$

답 ③

10 $j(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$j'(x)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \boxed{g(x+h)} + f(x) \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= f'(x)g(x) + \boxed{f(x)g'(x)}$$

$$\therefore (\forall) g(x+h) \quad (\forall) f(x)g'(x)$$

답 ①

11 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x) + f(h) + 4xh\} - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 4xh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 4x \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} + 4x \right\}$$

$$= f'(0) + 4x = 4x - 1$$

답 ⑤

다른풀이 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$f(x+y) - f(x) = f(y) + 4xy \text{의 양변을 } y \text{로 나누면}$$

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + 4x$$

이므로

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} + 4x \right\}$$

$$\therefore f'(x) = f'(0) + 4x = 4x - 1$$

12 $f(-2) = b$ 이므로

$$4 - 2a + 1 = b \quad \therefore b = -2a + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = x^2 + ax + 1 \text{에서 } f'(x) = 2x + a$$

$$f'(-4) = -7 \text{이므로 } -8 + a = -7 \quad \therefore a = 1$$

$$a = 1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = 3$$

$$\therefore a + b = 1 + 3 = 4$$

답 ④

13 $f'(x) = \{(3x^2-2)(4x+3)(-2x+k)\}'$
 $= (3x^2-2)'(4x+3)(-2x+k)$
 $+ (3x^2-2)(4x+3)'(-2x+k)$
 $+ (3x^2-2)(4x+3)(-2x+k)'$
 $= 6x(4x+3)(-2x+k) + (3x^2-2) \times 4 \times (-2x+k)$
 $+ (3x^2-2)(4x+3) \times (-2)$

이므로
 $f'(-1) = -6 \times (-1) \times (2+k) + 1 \times 4 \times (2+k)$
 $+ 1 \times (-1) \times (-2)$
 $= 10k + 22$

이때 $f'(-1) = 12$ 이므로 $10k + 22 = 12$, $10k = -10$
 $\therefore k = -1$ 답 ②

14 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = 4$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+1\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$
 $\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ ($\because f(x)$ 는 연속함수)
이때 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ 이므로
 $f'(1) = 4$

또, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x^2-1} = 3$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-2\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$
 $\therefore g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ ($\because g(x)$ 는 연속함수)
이때
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{(x+1)(x-1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$
 $= \frac{1}{2} g'(1)$

이므로 $\frac{1}{2} g'(1) = 3 \quad \therefore g'(1) = 6$

$h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
따라서 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는
 $h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$
 $= 4 \times 2 + (-1) \times 6 = 2$ 답 ②

15 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h)-f(-1)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(-1+3h)-f(-1)}{3h} \times \frac{3}{2} \right\}$
 $= \frac{3}{2} f'(-1)$

이때 $f'(x) = 2x+3$ 이므로
 $f'(-1) = -2+3=1$
따라서 구하는 값은
 $\frac{3}{2} f'(-1) = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$ 답 ⑤

16 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-3}{x^2-1} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-3}{(t-1)^2-1} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-3}{t(t-2)} = 4$
 $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-3}{t(t-2)} = 4$ 에서 극한값이 존재하고 $t \rightarrow 2$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{t \rightarrow 2} \{f(t)-3\} = 0 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 3$
 $\therefore f(2) = \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 3$ ($\because f(t)$ 는 연속함수)
즉, $8+2a+b=3$ 이므로 $b = -2a-5$ ㉠

이때 $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-3}{t(t-2)} = \lim_{t \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(t)-f(2)}{t-2} \times \frac{1}{t} \right\} = \frac{1}{2} f'(2)$ 이므로
 $\frac{1}{2} f'(2) = 4 \quad \therefore f'(2) = 8$
 $f'(x) = 3x^2+a$ 에서 $f'(2) = 12+a=8 \quad \therefore a = -4$
 $a = -4$ 를 ㉠에 대입하면 $b = 3$
 $\therefore a+b = -4+3 = -1$ 답 ⑤

17 $f(x) = x^9 + x^7 + x^2 - 3x$ 라 하면
 $f(-1) = -1 - 1 + 1 + 3 = 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^9 + x^7 + x^2 - 3x - 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$
이때 $f'(x) = 9x^8 + 7x^6 + 2x - 3$ 이므로
 $f'(-1) = 9 + 7 - 2 - 3 = 11$ 답 ①

18 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, -6)$ 을 지나므로 $f(2) = -6$
에서
 $8+4a+2b = -6 \quad \therefore 2a+b = -7$ ㉠

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, -6)$ 에서의 접선의 기울기
가 2이므로 $f'(2) = -3$ 에서
 $12+4a+b = -3 \quad \therefore 4a+b = -15$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -4, b = 1$
따라서 $f(x) = x^3 - 4x^2 + x$ 이므로
 $f(3) = 27 - 36 + 3 = -6$ 답 ③

19 다항함수 $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 $f'(x)$ 의 차수는 $n-1$ 이다.
조건 ㉠에서 $\{f'(x)\}^2 = 12f(x) - 8$ 의 좌변의 차수는 $2(n-1)$
이고 우변의 차수는 n 이므로
 $2(n-1) = n, 2n-2 = n \quad \therefore n = 2$
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x) = 2ax + b$
조건 ㉡에서 $4a+b=8$ ㉢

조건 ㉢에서
 $(2ax+b)^2 = 12(ax^2+bx+c) - 8$
 $\therefore (4a^2-12a)x^2 + (4ab-12b)x + b^2-12c+8 = 0$
위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로
 $4a^2-12a=0, 4ab-12b=0, b^2-12c+8=0$
 $4a^2-12a=0$ 에서 $4a(a-3)=0$
 $\therefore a=3$ ($\because a \neq 0$)

$a=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$12+b=8$$

$$\therefore b=-4$$

$b^2-12c+8=0$ 에 $b=-4$ 를 대입하면

$$16-12c+8=0$$

$$-12c=-24$$

$$\therefore c=2$$

따라서 $f(x)=3x^2-4x+2$ 이므로

$$f(1)=3-4+2=1$$

답 ①

20 $f(x)=x^{100}+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 가 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로

$f(x)$ 는 $(x+1)^2$ 으로 나누어떨어진다. 즉,

$$f(-1)=0, f'(-1)=0$$

$$f(-1)=0에서$$

$$1-a+b=0$$

$$\therefore b=a-1$$

..... ㉠

$f'(x)=100x^{99}+a$ 이므로 $f'(-1)=0$ 에서

$$-100+a=0$$

$$\therefore a=100$$

$a=100$ 을 ㉠에 대입하면

$$b=99$$

$$\therefore a+b=100+99=199$$

답 ④

다른풀이 다항식 $x^{100}+ax+b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^{100}+ax+b=(x+1)^2Q(x)$$

..... ㉡

$x=-1$ 을 ㉡의 양변에 대입하면

$$1-a+b=0$$

$$\therefore b=a-1$$

..... ㉢

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$100x^{99}+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$$

..... ㉣

$x=-1$ 을 ㉣의 양변에 대입하면

$$-100+a=0$$

$$\therefore a=100$$

$a=100$ 을 ㉢에 대입하면

$$b=99$$

$$\therefore a+b=100+99=199$$

21 다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3x+4$ 이므로

$$f(x)=(x-2)^2Q(x)+3x+4$$

..... ㉠

$x=2$ 를 ㉠의 양변에 대입하면

$$f(2)=6+4=10$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+3$$

..... ㉡

$x=2$ 를 ㉡의 양변에 대입하면

$$f'(2)=3$$

$$\therefore f(2)+f'(2)=10+3=13$$

답 ⑤

변형유형 집중공략

p.76~79

$$1-1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-3h)-f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 - \frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h} \times (-3) \right\} \\ &= 2f'(1)+3f'(1) \\ &= 5f'(1) \end{aligned}$$

이므로

$$5f'(1)=15 \quad \therefore f'(1)=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x^3)-f(1)\}(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1} \times (x^2+x+1) \right\}$$

$$= 3f'(1)=3 \times 3=9$$

답 9

$$\text{참고} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{(1+2h)-(1-3h)} \times 5 \right\}$$

$$= 5f'(1)$$

$$1-2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(8+4h)-f(8+2h)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(8+4h)-f(8)-\{f(8+2h)-f(8)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(8+4h)-f(8)}{4h} \times 4 - \frac{f(8+2h)-f(8)}{2h} \times 2 \right\} \\ &= 4f'(8)-2f'(8)=2f'(8) \end{aligned}$$

이므로

$$2f'(8)=2 \quad \therefore f'(8)=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3)-f(8)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x^3)-f(8)\}(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x^3)-f(8)}{x^3-8} \times (x^2+2x+4) \right\}$$

$$= 12f'(8)=12 \times 1=12$$

답 12

2-1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$

이고, 이 접선이 직선 $y=-4x-1$ 에 평행하므로

$$f'(2)=-4$$

$\frac{1}{n}=h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(2+\frac{1}{n}\right) - f\left(2-\frac{1}{4n}\right) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h)-f\left(2-\frac{1}{4}h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h)-f(2)-\{f\left(2-\frac{1}{4}h\right)-f(2)\}}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \frac{f\left(2-\frac{1}{4}h\right)-f(2)}{-\frac{1}{4}h} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \right\} \\
&= f'(2) + \frac{1}{4}f'(2) = \frac{5}{4}f'(2) \\
&= \frac{5}{4} \times (-4) = -5 \quad \text{답} -5
\end{aligned}$$

2-2 $\frac{1}{n}=h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0^+$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(1+\frac{2}{n}\right) - f\left(1-\frac{1}{n}\right) \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{2h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{2h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} - \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \\
&= f'(1) + \frac{1}{2}f'(1) = \frac{3}{2}f'(1) \\
&\text{즉, } \frac{3}{2}f'(1)=6 \text{이므로 } f'(1)=4 \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^4)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x^4)-f(1)\}(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^4)-f(1)}{x^4-1} \times (x+1)(x^2+1) \right\} \\
&= 4f'(1) = 4 \times 4 = 16 \quad \text{답} 16
\end{aligned}$$

3-1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$\begin{aligned}
&f(1)=-3, f'(1)=2 \\
&\text{이때 } g(x)=(x^2+2x)f(x) \text{에서} \\
&g'(x)=\{(x^2+2x)f(x)\}' \\
&= (x^2+2x)'f(x) + (x^2+2x)f'(x) \\
&= (2x+2)f(x) + (x^2+2x)f'(x) \\
&\text{이므로} \\
&g'(1)=4f(1)+3f'(1)=4 \times (-3) + 3 \times 2 = -6 \quad \text{답} -6
\end{aligned}$$

3-2 $f(x)=(x-k)^3$ 에서

$$\begin{aligned}
&f'(x)=\{(x-k)^3\}' \\
&= \{(x-k)(x-k)(x-k)\}' \\
&= (x-k)'(x-k)(x-k) + (x-k)(x-k)'(x-k) \\
&\quad + (x-k)(x-k)(x-k)' \\
&= 3(x-k)^2 \\
&y=f(x)g(x) \text{에서} \\
&y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\
&\text{이 곡선 위의 } x=-3 \text{인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로} \\
&f'(-3)g(-3)+f(-3)g'(-3)=4 \\
&3(-3-k)^2 \times 2 + (-3-k)^3 \times 2 = 4 \\
&3(-3-k)^2 + (-3-k)^3 = 2 \\
&(-3-k)^2\{3+(-3-k)\}=2, -k(-3-k)^2=2
\end{aligned}$$

$$k^3+6k^2+9k+2=0, (k+2)(k^2+4k+1)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=-2 \pm \sqrt{3}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-2(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})=-2 \quad \text{답} -2$$

4-1 $g(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 $g'(x)=a$ 이므로

$$g(-1)=-a+b, g'(-1)=a$$

조건 (나)에서

$$a+(-a+b)=1 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore g(x)=ax+1$$

조건 (가)에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+g(x)-17\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+g(x)\}=17$$

$$\therefore f(-1)+g(-1)=\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+g(x)\}=17$$

($\because f(x)+g(x)$ 는 연속함수)

$$\text{조건 (다)에서 } 10+g(-1)=17 \text{이므로 } g(-1)=7$$

$$\text{즉, } g(-1)=-a+1=7 \text{이므로 } a=-6$$

$$\therefore g(x)=-6x+1 \quad \therefore g(1)=-6+1=-5$$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)-17}{x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)-\{f(-1)+g(-1)\}}{x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} + \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} \right\} \\
&= f'(-1)+g'(-1)
\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(-1)+g'(-1)=-12$$

$$f'(-1)-6=-12 \quad (\because g'(-1)=-6)$$

$$\therefore f'(-1)=-6$$

$$\therefore f'(-1)-g(1)=-6-(-5)=-1$$

답 -1

참고 $h(x)=f(x)+g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)-17}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} \\
&= h'(-1)=f'(-1)+g'(-1)
\end{aligned}$$

4-2 $g(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 $g'(x)=a$ 이므로

$$a=3 \quad (\because \text{조건 (가)})$$

$$\therefore g(x)=3x+b$$

$$\text{또, } g(2)=6+b, g'(2)=3 \text{이므로 조건 (나)에서}$$

$$2 \times 3 = (6+b) + 1 \quad \therefore b=-1$$

$$\text{따라서 } g(x)=3x-1 \text{이므로 } g(3)=9-1=8$$

한편, 조건 (다)에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)g(x)+3\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=-3$$

$$\therefore f(0)g(0)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=-3$$

($\because f(x)g(x)$ 는 연속함수)

$$g(0)=-1 \text{이므로 } -f(0)=-3$$

$$\therefore f(0)=3$$

조건 (다)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) + 3}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x - 0}$$

$$= f'(0)g(0) + f(0)g'(0) \quad \leftarrow \text{함수 } f(x)g(x) \text{의 } x=0 \text{에서의 미분계수}$$

$$= f'(0) \times (-1) + 3 \times 3$$

$$= -f'(0) + 9$$

$$\text{이므로 } -f'(0) + 9 = 13$$

$$\therefore f'(0) = -4$$

$$f(x) = x^2 + cx + d \quad (c, d \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x + c$$

$$f'(0) = -4 \text{이므로 } c = -4$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 2x - 4 \text{이므로}$$

$$f'(1) = 2 - 4 = -2$$

$$\therefore \frac{g(3)}{f'(1)} = \frac{8}{-2} = -4$$

답 -4

참고 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$

$$= h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

서술형 What & How

p.80~83

- 1 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -2에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{(27 - 12 + 6) - (-8 + 8 + 6)}{5}$$

$$= \frac{15}{5} = 3$$

..... ①

$$f(x) = x^3 - 4x + 6 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

..... ②

$$f'(a) = 3 \text{이므로}$$

$$3a^2 - 4 = 3$$

$$\therefore 3a^2 = 7$$

..... ③

답 7

- 2 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{(9 - 3) - (1 + 1)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

..... ①

$$f(x) = x^2 - x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

..... ②

$$f'(a) = 1 \text{이므로 } 2a - 1 = 1, 2a = 2$$

$$\therefore a = 1$$

..... ③

답 1

채점기준	배점
① 평균변화율 구하기	2
② $f'(x)$ 구하기	1
③ a 의 값 구하기	2

- 3 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (ax^2 + 3) = a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x + b) = 2 + b$$

$$f(1) = a + 3$$

이므로

$$a + 3 = 2 + b$$

$$\therefore b = a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

..... ①

$$\therefore f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & (x \geq 1) \\ 2x + a + 1 & (x < 1) \end{cases}$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(ax^2 + 3) - (a + 3)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ax^2 - a}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} a(x+1) = 2a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(2x + a + 1) - (a + 3)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$= 2$$

이므로

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$a = 1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = 2$$

..... ②

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

..... ③

답 3

- 4 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 미분가능하므로 $x=3$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x^2 + ax + 6) = 9 + 3a + 6 = 3a + 15,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-x + b) = b - 3,$$

$$f(3) = 9 + 3a + 6 = 3a + 15$$

이므로

$$3a + 15 = b - 3$$

$$\therefore b = 3a + 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

..... ①

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 6 & (x \geq 3) \\ -x + 3a + 18 & (x < 3) \end{cases}$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x^2+ax+6-(3a+15)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x^2+ax-3a-9}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)(x+a+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} (x+a+3) \\ &= 3+a+3=a+6, \\ \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{-x+3a+18-(3a+15)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1\end{aligned}$$

이므로 $a+6=-1 \quad \therefore a=-7$

$a=-7$ 을 ㉠에 대입하면 $b=-3$ ②

$\therefore b-a=-3-(-7)=4$ ③

답 4

채점기준	배점
① a, b 사이의 관계식 구하기	2
② a, b 의 값 구하기	3
③ $b-a$ 의 값 구하기	1

- 5 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy+2$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-0+2 \quad \therefore f(0)=-2 \quad \text{..... ①}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)-3xh+2\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-3xh+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)+2}{h} - 3x \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h-0} - 3x \right\} = f'(0) - 3x \\ &= -3x+3 \quad \text{..... ②}\end{aligned}$$

따라서

$$f'(-1)=3+3=6, f'(-3)=9+3=12 \quad \text{..... ③}$$

이므로

$$\frac{f'(-3)}{f'(-1)} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{..... ④}$$

답 2

- 6 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \text{..... ①}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)-xh\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} - x \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h-0} - x \right\} = f'(0) - x \\ &= -x-1 \quad \text{..... ②}\end{aligned}$$

따라서

$$f'(1)=-1-1=-2, f'(2)=-2-1=-3 \quad \text{..... ③}$$

이므로

$$f'(1)+f'(2)=-2+(-3)=-5 \quad \text{..... ④}$$

답 -5

채점기준	배점
① $f(0)$ 의 값 구하기	1
② $f'(x)$ 구하기	3
③ $f'(1), f'(2)$ 의 값 구하기	1
④ $f'(1)+f'(2)$ 의 값 구하기	1

- 7 다항식 x^8+ax+b 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3x-4$ 이므로

$$x^8+ax+b=(x-1)^2Q(x)+3x-4 \quad \text{..... ㉠} \quad \text{..... ①}$$

$x=1$ 을 ㉠의 양변에 대입하면

$$1+a+b=3-4$$

$$\therefore b=-a-2 \quad \text{..... ㉡} \quad \text{..... ②}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$8x^7+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+3 \quad \text{..... ㉢} \quad \text{..... ③}$$

$x=1$ 을 ㉢의 양변에 대입하면

$$8+a=3$$

$$\therefore a=-5$$

$a=-5$ 를 ㉡에 대입하면

$$b=3 \quad \text{..... ④}$$

$$\therefore b-a=3-(-5)=8 \quad \text{..... ⑤}$$

답 8

- 8 다항식 x^7-x^3+3 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하고, $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^7-x^3+3=(x+1)^2Q(x)+ax+b \quad \text{..... ㉠} \quad \text{..... ①}$$

$x=-1$ 을 ㉠의 양변에 대입하면

$$-1+1+3=-a+b$$

$$\therefore b=a+3 \quad \text{..... ㉡} \quad \text{..... ②}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$7x^6-3x^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a \quad \text{..... ㉢} \quad \text{..... ③}$$

$x=-1$ 을 ㉢의 양변에 대입하면

$$7-3=a$$

$$\therefore a=4 \quad \text{..... ④}$$

$a=4$ 를 ㉡에 대입하면

$$b=7$$

따라서 $R(x)=4x+7$ 이므로

$$R(5)=20+7=27 \quad \text{..... ⑤}$$

답 27

채점기준	배점
① 다항식의 나눗셈을 항등식으로 나타내기	1
② a, b 사이의 관계식 구하기	2
③ a, b 의 값 구하기	2
④ $R(5)$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.84~87

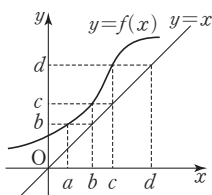
01 $f(a)=b, f(c)=d$ 이므로

$$g(b)=a, g(d)=c$$

따라서 x 의 값이 b 에서 d 까지 변할 때
의 함수 $g(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{g(d)-g(b)}{d-b} = \frac{c-a}{d-b}$$

답 ④

02 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -1 에서 1 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{(-1+5)-(-1-5)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\therefore a=5$$

$$f'(x) = -2x+5 \text{ 이므로}$$

$$f'(a) = f'(5) = -10+5 = -5$$

$$\therefore a+f'(a) = 5+(-5) = 0$$

답 ③

03 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} = 3$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-g(x)\} = 0$$

$$\therefore f(1)-g(1)=0 \quad (\because f(x), g(x) \text{는 연속함수})$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)-\{f(1)-g(1)\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \right\} \\ &= f'(1) - g'(1) = 2 - g'(1) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2 - g'(1) = 3$$

$$\therefore g'(1) = -1$$

답 ②

04 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} \left\{ f\left(4 + \frac{2}{n}\right) - f\left(4 - \frac{3}{n}\right) \right\} = 20$ 에서 $\frac{1}{n} = h$ 로 놓으면

$n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} \left\{ f\left(4 + \frac{2}{n}\right) - f\left(4 - \frac{3}{n}\right) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(4+2h)-f(4-3h)}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(4+2h)-f(4)-\{f(4-3h)-f(4)\}}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(4+2h)-f(4)}{2h} \times \frac{2}{3} - \frac{f(4-3h)-f(4)}{-3h} \times (-1) \right\}$$

$$= \frac{2}{3} f'(4) + f'(4) = \frac{5}{3} f'(4)$$

$$\text{즉, } \frac{5}{3} f'(4) = 20 \text{ 이므로 } f'(4) = 12$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2)-f(4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x^2)-f(4)\}(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4} \times (x+2) \right\}$$

$$= 4f'(4) = 4 \times 12 = 48$$

답 ③

05 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선과 직선

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \text{이 서로 수직이므로}$$

$$f'(2) \times \frac{1}{2} = -1 \quad \therefore f'(2) = -2$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{8h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)-\{f(2-2h)-f(2)\}}{8h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} \times \frac{1}{4} - \frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h} \right\}$$

$$\times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} f'(2) + \frac{1}{4} f'(2) = \frac{1}{2} f'(2)$$

$$= \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

답 ②

06 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$x \neq \pm 1$ 일 때, $(x^2-1)f(x) = g(x) - 1$ 의 양변을 x^2-1 로 나누

$$\text{면 } f(x) = \frac{g(x)-1}{x^2-1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{x^2-1}$$

이때 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-1\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

$$\therefore g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 \quad (\because g(x) \text{는 연속함수})$$

$g(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 연속함수이다.

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} = \frac{1}{2} g'(1)$$

답 ①

$$07 f(x) = \begin{cases} x-1+1 & (x \geq 1) \\ -(x-1)+1 & (x < 1) \end{cases} = \begin{cases} x & (x \geq 1) \\ -x+2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+2) = 1,$$

$$f(1) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 연속이다. (참)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x+2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

따라서 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$

에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $g(x) = (x-1)f(x)$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} x(x-1) & (x \geq 1) \\ (-x+2)(x-1) & (x < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x(x-1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+2)(x-1) = 0,$$

$$g(1) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = g(1)$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=1$

에서 연속이다. 한편,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(-x+2)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+2) = -1+2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } g'(1) = 1$$

따라서 함수 $g(x) = (x-1)f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

- 08 함수 $g(x)$ 가 $x=-3$ 에서 미분가능하므로 $x=-3$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3-} g(x) = g(-3)$$

이때 $f(x)$ 가 연속함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3+} \{54 - f(x)\} = 54 - f(-3),$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = f(-3),$$

$$g(-3) = 54 - f(-3)$$

$$\text{즉, } 54 - f(-3) = f(-3) \text{이므로}$$

$$2f(-3) = 54 \quad \therefore f(-3) = 27 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 함수 $g(x)$ 가 $x=-3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{g(x) - g(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{g(x) - g(-3)}{x - (-3)}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{g(x) - g(-3)}{x - (-3)} &= \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{54 - f(x) - \{54 - f(-3)\}}{x - (-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3+} \left\{ -\frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} \right\} \\ &= -f'(-3), \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-} \frac{g(x) - g(-3)}{x - (-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{f(x) - \{54 - f(-3)\}}{x - (-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} \quad (\because 54 = 2f(-3))$$

$$= f'(-3)$$

$$\text{이므로 } -f'(-3) = f'(-3)$$

$$2f'(-3) = 0 \quad \therefore f'(-3) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{에서 } f'(x) = 2x + a$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } f'(-3) = -6 + a = 0 \quad \therefore a = 6$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + 6x + b \text{이므로 } \textcircled{㉠} \text{에서}$$

$$f(-3) = 9 - 18 + b = 27 \quad \therefore b = 36$$

$$\text{따라서 } g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 36 & (x < -3) \\ -x^2 - 6x + 18 & (x \geq -3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(2) = -4 - 12 + 18 = 2$$

답 ④

$$\begin{aligned} 09 \quad g(x) &= x^3 + (-a-4)x^2 + (4a+4)x - 4a \\ &= (x-2)^2(x-a) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x)|g(x)| &= (x+3)|(x-2)^2(x-a)| \\ &= \begin{cases} (x+3)(x-2)^2(x-a) & (x \geq a) \\ -(x+3)(x-2)^2(x-a) & (x < a) \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=a$ 에서 미분가능해야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)|g(x)| = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)|g(x)| = f(a)|g(a)| = 0 \text{이므로}$$

함수 $f(x)|g(x)|$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

또, 함수 $f(x)|g(x)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하려면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)|g(x)| - f(a)|g(a)|}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x+3)(x-2)^2(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} (x+3)(x-2)^2 = (a+3)(a-2)^2, \\ \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)|g(x)| - f(a)|g(a)|}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{-(x+3)(x-2)^2(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \{-(x+3)(x-2)^2\} = -(a+3)(a-2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } (a+3)(a-2)^2 = -(a+3)(a-2)^2$$

$$2(a+3)(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-3 + 2 = -1$$

답 ⑤

$$\text{참고 } g(2) = 8 + 4(-a-4) + 2(4a+4) - 4a = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -a-4 & 4a+4 & -4a \\ & & 2 & -2a-4 & 4a \\ \hline 2 & 1 & -a-2 & 2a & 0 \\ & & 2 & -2a & \\ \hline & 1 & -a & 0 & \end{array}$$

$$\therefore g(x) = (x-2)^2(x-a)$$

$$10 \quad f(-t) = 0, f(0) = 0, f(3t) = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = x(x+t)(x-3t) = x^3 - 2tx^2 - 3t^2x \quad (t \neq 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4tx - 3t^2$$

$$\therefore f'(3) = 27 - 12t - 3t^2 = -3(t+2)^2 + 39$$

따라서 $f'(3)$ 은 $t = -2$ 일 때 최댓값 39를 갖는다.

답 ①

- 11 조건 ㉠에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$f(x) = ax^3 + cx \quad (a, c \text{는 상수, } a \neq 0) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + c$$

$$f'(0) = 18 \text{에서 } c = 18 \quad \therefore f'(x) = 3ax^2 + 18$$

$$f'(1)=12\text{에서}$$

$$3a+18=12, 3a=-6 \quad \therefore a=-2$$

따라서 $f(x)=-2x^3+18x$ 이므로

$$f(2)=-16+36=20$$

답 ①

참고 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라

하면 조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$ 이므로

$$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$$

$$\therefore 2bx^2+2d=0$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$b=d=0$$

$$\therefore f(x)=ax^3+cx$$

$$12 \quad g(x)=(x^2-5x)f(x)\text{에서}$$

$$g'(x)=\{(x^2-5x)f(x)\}'$$

$$=(x^2-5x)'f(x)+(x^2-5x)f'(x)$$

$$=(2x-5)f(x)+(x^2-5x)f'(x)$$

$$\therefore g'(2)=(4-5) \times f(2)+(4-10) \times f'(2)$$

$$=-1 \times (-1)-6 \times 2=-11$$

답 ②

$$13 \quad f'(x)=\{(2x+k)^3\}'$$

$$=\{(2x+k)(2x+k)(2x+k)\}'$$

$$=(2x+k)'(2x+k)(2x+k)$$

$$+(2x+k)(2x+k)'(2x+k)$$

$$+(2x+k)(2x+k)(2x+k)'$$

$$=2(2x+k)^2 \times 3$$

$$=6(2x+k)^2$$

$$f'(-1)=54\text{에서}$$

$$6(-2+k)^2=54$$

$$(-2+k)^2=9$$

$$-2+k=\pm 3$$

$$\therefore k=-1 \quad (\because k < 0)$$

따라서 $f'(x)=6(2x-1)^2$ 이므로

$$f'(1)=6 \times (2-1)^2=6$$

$$\therefore k+f'(1)=-1+6=5$$

답 ⑤

$$14 \quad h(x)=f(x)g(x)\text{라 하면}$$

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

함수 $h(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

$$f(x)=2x^2+3x+1\text{에서}$$

$$f'(x)=4x+3\text{이므로}$$

$$f(1)=2+3+1=6, f'(1)=4+3=7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-3}{\sqrt{x}-1}=2\text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 1\text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-3\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x)=3$$

$$\therefore g(1)=\lim_{x \rightarrow 1} g(x)=3 \quad (\because g(x)\text{는 연속함수})$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-3}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)-g(1)\}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \times (\sqrt{x}+1) \right\}=2g'(1)$$

$$\text{이므로 } 2g'(1)=2 \quad \therefore g'(1)=1$$

$$\therefore h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

$$=7 \times 3+6 \times 1=27$$

답 ③

$$15 \quad g(x)=f(x)-x\text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x}{x-2}=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2}=5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2}=5\text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 2\text{일 때 (분모)} \rightarrow 0$$

이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)=0$$

$$\therefore g(2)=\lim_{x \rightarrow 2} g(x)=0 \quad (\because g(x)\text{는 연속함수})$$

$$\text{즉, } f(2)-2=0\text{이므로 } f(2)=2$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)\text{이므로}$$

$$g'(2)=5$$

$g(x)=f(x)-x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f'(x)-1$$

$$g'(2)=5\text{에서 } f'(2)-1=5 \quad \therefore f'(2)=6$$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f(0)=6\text{에서 } c=6$$

$$f(2)=2\text{에서}$$

$$8+4a+2b+6=2, 4a+2b=-12$$

$$\therefore 2a+b=-6$$

..... ㉠

$$f'(2)=6\text{에서}$$

$$12+4a+b=6 \quad \therefore 4a+b=-6$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=-6$

따라서 $f'(x)=3x^2-6$ 이므로

$$f'(-2)=12-6=6$$

답 ④

$$16 \quad f(x)=x^n+x^2+x\text{라 하면}$$

$$f(1)=1+1+1=3$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n+x^2+x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+2} \right\}$$

$$=\frac{1}{3}f'(1)$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{3}f'(1)=3 \quad \therefore f'(1)=9$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$ 이므로 $f'(1)=9$ 에서

$$n+2+1=9 \quad \therefore n=6$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
17 \quad f'(x) &= (x+1)'(x+2)(x+3)\cdots(x+9)(x+10) \\
&\quad + (x+1)(x+2)'(x+3)\cdots(x+9)(x+10) \\
&\quad + (x+1)(x+2)(x+3)'\cdots(x+9)(x+10) \\
&\quad + \cdots + (x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+9)'(x+10) \\
&\quad + (x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+9)(x+10)' \\
&= (x+2)(x+3)(x+4)\cdots(x+9)(x+10) \\
&\quad + (x+1)(x+3)(x+4)\cdots(x+9)(x+10) \\
&\quad + (x+1)(x+2)(x+4)\cdots(x+9)(x+10) \\
&\quad + \cdots + (x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+8)(x+10) \\
&\quad + (x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+8)(x+9)
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\frac{f'(-2)}{f'(-8)} \\
&= \frac{-1 \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 7 \times 8}{-7 \times (-6) \times (-5) \times \cdots \times (-2) \times (-1) \times 1 \times 2} = 4
\end{aligned}$$

답 ④

18 조건 (나)에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 4$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 4} \{4f(x) - xf(2)\} = 0$ 이므로

$$4f(4) - 4f(2) = \lim_{x \rightarrow 4} \{4f(x) - xf(2)\} = 0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\therefore f(2) = f(4)$$

이때 조건 (가)에서 $f(2) + f(4) = 12$ 이므로

$$f(2) = f(4) = 6 \quad \cdots \cdots ㉠$$

따라서

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4f(x) - xf(2)}{x-4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4f(x) - xf(4)}{x-4} \quad (\because ㉠) \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4f(x) - 4f(4) - \{xf(4) - 4f(4)\}}{x-4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4\{f(x) - f(4)\} - (x-4)f(4)}{x-4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{f(x) - f(4)}{x-4} \times 4 - f(4) \right\} = 4f'(4) - f(4)
\end{aligned}$$

이므로 $4f'(4) - f(4) = 30$, $4f'(4) - 6 = 30 \quad (\because ㉠)$

$$4f'(4) = 36 \quad \therefore f'(4) = 9$$

답 ②

19 $x+3=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 5$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+3)-3}{x^2-4} &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t)-3}{(t-3)^2-4} \\
&= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t)-3}{(t-1)(t-5)} = 5 \quad \cdots \cdots ㉠
\end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t)-3}{(t-1)(t-5)} = 5$ 에서 극한값이 존재하고 $t \rightarrow 5$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{t \rightarrow 5} \{f(t)-3\} = 0 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 5} f(t) = 3$$

$$\therefore f(5) = \lim_{t \rightarrow 5} f(t) = 3 \quad (\because f(t) \text{는 연속함수}) \quad \cdots \cdots ㉡$$

이때

$$\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t)-3}{(t-1)(t-5)} = \lim_{t \rightarrow 5} \left\{ \frac{f(t)-f(5)}{t-5} \times \frac{1}{t-1} \right\} = \frac{1}{4} f'(5)$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{4} f'(5) = 5 \quad \therefore f'(5) = 20 \quad \cdots \cdots ㉢$$

$$\therefore f(5) + f'(5) = 3 + 20 = 23 \quad \cdots \cdots ㉣$$

답 23

채점기준	배점
① $x+3=t$ 로 놓고 주어진 식을 t 에 대한 식으로 변형하기	2
② $f(5)$ 의 값 구하기	1
③ $f'(5)$ 의 값 구하기	2
④ $f(5)+f'(5)$ 의 값 구하기	1

20 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$$f(2) = -1$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하고,

$R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-2)^2 Q(x) + ax + b \quad \cdots \cdots ㉠ \quad \cdots \cdots ㉠$$

$x=2$ 를 ㉠의 양변에 대입하면

$$f(2) = 2a + b = -1 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q'(x) + a \quad \cdots \cdots ㉢$$

$x=2$ 를 ㉢에 양변에 대입하면

$$f'(2) = a = 1$$

$a=1$ 을 ㉡에 대입하면 $2+b=-1$

$$\therefore b = -3 \quad \cdots \cdots ㉣$$

따라서 $R(x) = x - 3$ 이므로

$$R(10) = 10 - 3 = 7 \quad \cdots \cdots ㉤$$

답 7

채점기준	배점
① 다항식의 나눗셈을 항등식으로 나타내기	2
② a, b 의 값 구하기	3
③ $R(10)$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.88~91

01 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{(a^3+2a^2-1)-(-1)}{a} = \frac{a^3+2a^2}{a} = a^2+2a$$

이므로

$$a^2+2a=3, a^2+2a-3=0, (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$-3 \times 1 = -3$$

답 ①

$$02 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+mh)-f(2-nh)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+mh)-f(2)-\{f(2-nh)-f(2)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(2+mh)-f(2)}{mh} \times m - \frac{f(2-nh)-f(2)}{-nh} \times (-n) \right\}$$

$$= mf'(2) + nf'(2) = (m+n)f'(2) = 4(m+n)$$

이므로

$$4(m+n)=24 \quad \therefore m+n=6$$

따라서 이를 만족시키는 두 자연수 m, n 의 순서쌍

(m, n) 은

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$

의 5개이다.

답 ④

03 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -1 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{7-(-2)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

이므로 $f'(1)=3$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x^2)-f(1)\}(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\} \\ &= 2f'(1) = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

답 ③

04 ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 에서 x 의 값이 0 에서 3 까지 변할 때의 평균변화율은 각각

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{f(3)}{3}, \quad \frac{g(3)-g(0)}{3-0} = \frac{g(3)}{3}$$

이때 주어진 그래프에서 $f(3) < g(3)$ 이므로

$$\frac{f(3)}{3} < \frac{g(3)}{3} \quad (\text{참})$$

ㄴ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 에서 x 의 값이 0 에서 4 까지 변할 때의 평균변화율은 각각

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{f(4)}{4}, \quad \frac{g(4)-g(0)}{4-0} = \frac{g(4)}{4}$$

이때 주어진 그래프에서 $f(4) = g(4)$ 이므로

$$\frac{f(4)}{4} = \frac{g(4)}{4} \quad (\text{참})$$

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선의 기울기가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로 $f'(4) > g'(4)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

다른풀이 ㄱ. 원점과 점 $(3, f(3))$ 을 지나는 직선의 기울기가 원점과 점 $(3, g(3))$ 을 지나는 직선의 기울기보다 작다.

따라서 x 의 값이 0 에서 3 까지 변할 때, 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은 함수 $g(x)$ 의 평균변화율보다 작다. (참)

ㄴ. $f(4)=g(4)$ 이므로 원점과 점 $(4, f(4))$ 를 지나는 직선과 원점과 점 $(4, g(4))$ 를 지나는 직선은 일치한다.

따라서 x 의 값이 0 에서 4 까지 변할 때, 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은 함수 $g(x)$ 의 평균변화율과 같다. (참)

05 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2+1 & (-1 < x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x^2+1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x-1) = -2 \end{aligned}$$

즉, $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (x \geq 1) \\ -(x-1)^2 & (x < 1) \end{cases}$$

이고 $h > 0$ 이면 $1+h > 1$, $h < 0$ 이면 $1+h < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(1+h)-1\}^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} h = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\{(1+h)-1\}^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-h) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore g'(1) = 0$$

따라서 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 1+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} k(x) = k(1) = 0$ 이므로 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{k(x)-k(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{k(x)-k(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore k'(1) = 2$$

따라서 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ이다.

답 ①

06 $x \neq 2$ 일 때, $h(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$h(2) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$f'(2)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선, 즉 직선 $y=g(x)$ 의 기울기이다. 이때 직선 $y=g(x)$ 는 두 점 $(2, 3), (0, -3)$ 을 지나므로

$$f'(2) = \frac{-3-3}{0-2} = 3$$

$$\therefore h(2) = f'(2) = 3$$

답 ④

- 07 $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy-2$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0-2 \quad \therefore f(0)=2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)+5xh-2\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+5xh-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h} + 5x \right\} \\ &= f'(0) + 5x \end{aligned}$$

$$f'(5)=f'(0)+25=3 \text{이므로 } f'(0)=-22$$

$$\therefore f'(x)=5x-22$$

답 ①

참고 $f'(5)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(5)+f(h)+25h-2\}-f(5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+25h-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h} + 25 \right\} \\ &= f'(0) + 25 = 3 \quad \therefore f'(0) = -22 \end{aligned}$$

- 08 $f(x)=x^2+|x-1|^3$

$$= \begin{cases} x^2+(x-1)^3 & (x \geq 1) \\ x^2-(x-1)^3 & (x < 1) \end{cases}$$

$f(1)=1$ 이고 $h>0$ 이면 $1+h>1$, $h<0$ 이면 $1+h<1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(1+h)^2+(1+h-1)^3\}-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2+2h+1+h^3-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^3+h^2+2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h^2+h+2)=2, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{(1+h)^2-(1+h-1)^3\}-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2+2h+1-h^3-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^3+h^2+2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (-h^2+h+2)=2 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(1)=2$$

답 ③

참고 $f'(1)=\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

과 같이 $f'(1)$ 의 값을 구할 수도 있지만 분자의

$f(x)=x^2 \pm (x-1)^3$ 을 전개하는 것보다

$f(1+h)=(1+h)^2 \pm h^3$ 을 전개하는 것이 더 간단하다.

- 09 $\frac{1}{n}=h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(1+\frac{2}{n}\right) - g\left(1-\frac{3}{n}\right) \right\} \\ = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+2h)-g(1-3h)}{2h} \end{aligned}$$

이때 $f(1)=g(1)=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+2h)-g(1-3h)}{2h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+2h)-f(1)-\{g(1-3h)-g(1)\}}{2h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} - \frac{g(1-3h)-g(1)}{-3h} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \right\} \\ = f'(1) + \frac{3}{2} g'(1) \end{aligned}$$

$$f'(x)=14x^6+6x^2, g'(x)=16x^7+8x^3 \text{이므로}$$

$$f'(1)=14+6=20, g'(1)=16+8=24$$

따라서 구하는 식의 값은

$$f'(1) + \frac{3}{2} g'(1) = 20 + \frac{3}{2} \times 24 = 56$$

답 ①

- 10 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)-4}{x^2-4} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-4}{(t+1)^2-4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-4}{(t+3)(t-1)} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-4}{(t+3)(t-1)} = 2 \text{에서 극한값이 존재하고 } t \rightarrow 1 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \{f(t)-4\} = 0 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 4$$

$$\therefore f(1) = \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 4 \quad (\because f(t) \text{는 연속함수})$$

$$f(1) = 3+a+b=4 \text{이므로 } b=-a+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(x) = 3x^2+ax-a+1$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-4}{(t+3)(t-1)} &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(t)-f(1)}{t-1} \times \frac{1}{t+3} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(1) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(1)=8$$

$$f'(x)=6x+a \text{에서}$$

$$6+a=8 \quad \therefore a=2$$

$$a=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=-1$$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-1$ 이므로

$$f(-1)=3-2-1=0$$

답 ③

- 11 조건 (4)에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$f(1)=1+(2a-1)+b+c=0 \text{이므로 } 2a+b+c=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} \right\} = \frac{1}{3} f'(1)$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{3} f'(1) = \frac{1}{3} \quad \therefore f'(1) = 1$$

$$f'(x)=3x^2+2(2a-1)x+b \text{이므로 } f'(1)=1 \text{에서}$$

$$3+2(2a-1)+b=1 \quad \therefore b=-4a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①을 ①에 대입하면

$$2a-4a+c=0 \quad \therefore c=2a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= x^3 + (2a-1)x^2 - 4ax + 2a \\ &= (x-1)(x^2 + 2ax - 2a) \end{aligned}$$

조건 ㉠에서 방정식 $f(x)=0$ 이 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2ax-2a=0$ 이 허근을 가져야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2+2ax-2a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 2a < 0, \quad a(a+2) < 0 \quad \therefore -2 < a < 0$$

a 는 정수이므로 $a=-1$

$a=-1$ 을 ①, ②에 대입하면 $b=4, c=-2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+4x-2$ 이므로

$$f(3)=27-27+12-2=10 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

12 조건 ㉠에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=0$

$$\therefore f(3)=\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수}) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)=5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

조건 ㉡에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)=0$

$$\therefore f(-2)=\lim_{x \rightarrow -2} f(x)=0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수}) \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

이때 이차함수 $f'(x)$ 는 연속함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f'(x)=f'(-2)$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow -2} f'(x)=f'(-2) \neq 0$ 이면 조건 ㉡에서

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+2)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{(x+2)f'(x)} \quad (\because \textcircled{C})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \times \frac{1}{f'(x)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f'(x)}$$

$$= f'(-2) \times \frac{1}{f'(-2)} = 1$$

이므로 조건 ㉡를 만족시키지 않는다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} f'(x)=f'(-2)=0 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

①, ②에서 $f(3)=f(-2)=0$ 이므로

$$f(x)=a(x-3)(x+2)(x-k) \quad (a, k \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면

$$f'(x) = \{a(x-3)(x+2)(x-k)\}'$$

$$= a\{(x-3)'(x+2)(x-k) + (x-3)(x+2)'(x-k) + (x-3)(x+2)(x-k)'\}$$

$$= a\{(x+2)(x-k) + (x-3)(x-k) + (x-3)(x+2)\}$$

③에서 $f'(-2)=0$ 이므로

$$f'(-2) = -5a(-2-k)=0 \quad \therefore k=-2 \quad (\because a \neq 0)$$

$$\therefore f'(x) = a\{(x+2)^2 + 2(x-3)(x+2)\}$$

①에서 $f'(3)=5$ 이므로

$$f'(3) = a \times 5^2 = 5 \quad \therefore a = \frac{1}{5}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{5}(x-3)(x+2)^2$ 이므로

$$f(-7) = \frac{1}{5} \times (-10) \times (-5)^2 = -50 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

참고 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)=f'(a)=0$ 이면 다항식 $f(x)$ 는 $(x-a)^2$ 을 인수로 갖는다.

13 $g(x)=x^2-4f(x)$ 라 하면

$$g'(x) = 2x - 4f'(x), \quad g(2) = 4 - 4f(2) = 4 - 4 \times 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} \\ &= g'(2) = 4 - 4f'(2) \\ &= 4 - 4 \times (-3) = 16 \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

14 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 2x^3 - 3x + 6}{x-2} = k$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^n - 2x^3 - 3x + 6) = 0, \quad 2^n - 16 - 6 + 6 = 0$$

$$2^n = 16 \quad \therefore n = 4$$

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x + 6$ 라 하면 $f(2) = 16 - 16 - 6 = -6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 3x + 6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 3 \text{이므로}$$

$$f'(2) = 32 - 24 - 3 = 5 \quad \therefore k = 5$$

$$\therefore n+k = 4+5 = 9 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} 15 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)+f(-3)}{5h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-f(3)}{5h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3+2h)-f(3)}{2h} \times \frac{2}{5} \right\} \\ &= \frac{2}{5} f'(3) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{2}{5} f'(3) = 4 \quad \therefore f'(3) = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+f(-3)}{x^3-27} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x^2+3x+9)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \frac{1}{x^2+3x+9} \right\} \\ &= \frac{1}{27} f'(3) = \frac{1}{27} \times 10 = \frac{10}{27} \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

16 조건 ㉠에서 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $2x-1$ 이므로

$$f(x) = (x-1)^2 Q_1(x) + 2x-1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x=1$ 을 ①의 양변에 대입하면

$$f(1) = 2-1=1$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-1)Q_1(x) + (x-1)^2 Q_1'(x) + 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$x=1$ 을 ㉠의 양변에 대입하면
 $f'(1)=2$
 조건 ㉠에서 다항식 $-xf(x)+g(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면
 $-xf(x)+g(x)=(x-1)^3Q_2(x)$ ㉡
 $x=1$ 을 ㉡의 양변에 대입하면
 $-f(1)+g(1)=0 \quad \therefore g(1)=f(1)=1$
 ㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $-f(x)-xf'(x)+g'(x)$
 $=3(x-1)^2Q_2(x)+(x-1)^3Q_2'(x)$ ㉢
 $x=1$ 을 ㉢의 양변에 대입하면
 $-f(1)-f'(1)+g'(1)=0$
 $\therefore g'(1)=f(1)+f'(1)=1+2=3$
 다항식 $g(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$ 라 하고
 $h(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $g(x)=(x-1)^2Q_3(x)+ax+b$ ㉣
 $x=1$ 을 ㉣의 양변에 대입하면
 $g(1)=a+b \quad \therefore b=-a+1$ ㉤
 ㉤의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $g'(x)=2(x-1)Q_3(x)+(x-1)^2Q_3'(x)+a$ ㉥
 $x=1$ 을 ㉥의 양변에 대입하면
 $g'(1)=a \quad \therefore a=3$
 $a=3$ 을 ㉤에 대입하면 $b=-2$
 따라서 $h(x)=3x-2$ 이므로
 $h(2)=6-2=4$ ㉦

- 17 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 $-1, 0, 1$ 이므로
 $f(x)=ax(x+1)(x-1)=ax^3-ax$ ($a \neq 0$)
 이때 $f'(x)=3ax^2-a$ 이므로 $f'(1)=-2$ 에서
 $3a-a=-2 \quad \therefore a=-1$
 따라서 $f'(x)=-3x^2+1$ 이므로
 $f'(a)=f'(-1)=-3+1=-2$ ㉧

- 18 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3}=4$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-1\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x)=1$
 $\therefore f(3)=\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=1$ ($\because f(x)$ 는 연속함수)
 이때 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3}=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$ 이므로
 $f'(3)=4$
 또, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-2}{x-3}=-1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 3} \{g(x)-2\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 3} g(x)=2$
 $\therefore g(3)=\lim_{x \rightarrow 3} g(x)=2$ ($\because g(x)$ 는 연속함수)
 이때 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-2}{x-3}=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)$ 이므로

$g'(3)=-1$
 $h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면
 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)g(x)-f(3)g(3)}{x-3}$
 $=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x)-h(3)}{x-3}$
 $=h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$
 $=4 \times 2 + 1 \times (-1) = 7$ ㉨

- 19 $f(x)=\begin{cases} (x+1)(x-a) & (x \geq -1) \\ -(x+1)(x-a) & (x < -1) \end{cases}$

$f'(-1)$ 이 존재하므로
 $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x-a)}{x+1}$
 $=\lim_{x \rightarrow -1+} (x-a)=-1-a,$
 $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)(x-a)}{x+1}$
 $=\lim_{x \rightarrow -1-} \{-(x-a)\}=1+a$

에서
 $-1-a=1+a$
 $-2a=2 \quad \therefore a=-1$ ㉩
 $\therefore f'(-1)=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=-1-(-1)=0$ ㉪
 $\therefore a+f'(-1)=-1+0=-1$ ㉫

답 -1

채점기준	배점
㉩ a 의 값 구하기	3
㉪ $f'(-1)$ 의 값 구하기	1
㉫ $a+f'(-1)$ 의 값 구하기	1

- 20 $f(x)-g(x)=-x^3+3x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=-3x^2+3$
 $\therefore f'(x)=g'(x)-3x^2+3$ ㉬
 또, $\frac{d}{dx}\{g(x)+2x^3-3x^2\}=xf'(x)$ 에서
 $g'(x)+6x^2-6x=xf'(x)$
 $g'(x)+6x^2-6x=x\{g'(x)-3x^2+3\}$ ($\because$ ㉬)
 $(x-1)g'(x)=3x(x+3)(x-1)$
 $x \neq 1$ 일 때, $g'(x)=3x(x+3)=3x^2+9x$
 $\therefore g'(2)=12+18=30$ ㉭
 $x=-1$ 을 ㉬에 대입하면
 $f'(-1)=g'(-1)-3+3=g'(-1)=3-9=-6$ ㉮
 $\therefore f'(-1)+g'(2)=-6+30=24$ ㉯

답 24

채점기준	배점
㉬ $f'(x)$ 를 $g'(x)$ 에 대하여 나타내기	2
㉭ $g'(2)$ 의 값 구하기	2
㉮ $f'(-1)$ 의 값 구하기	1
㉯ $f'(-1)+g'(2)$ 의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.92~96

- 1 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은
- $$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{-12-0}{4} = -3$$
- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$ 에서 $f'(a) = 3a^2 - 12a + 5$
 $f'(a) = -3$ 이어야 하므로
 $3a^2 - 12a + 5 = -3$
 $3a^2 - 12a + 8 = 0 \quad \therefore a = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$
 $0 < \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3} < 4$ 이므로 $0 < a < 4$ 인 모든 실수 a 의 값의 곱은 이
 차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다.
 따라서 $p=3, q=8$ 이므로
 $p+q=3+8=11$ 답 11
- 2 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은
- $$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{11-8}{3} = 1$$
- $f'(x) = 3x^2 - 14x + 15$ 에서 $f'(a) = 3a^2 - 14a + 15$
 $f'(a) = 1$ 이어야 하므로 $3a^2 - 14a + 15 = 1$
 $3a^2 - 14a + 14 = 0 \quad \therefore a = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{3}$
 $1 < \frac{7 \pm \sqrt{7}}{3} < 4$ 이므로 $1 < a < 4$ 인 모든 실수 a 의 값의 합은 이차
 방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{14}{3}$ 이다.
 따라서 $p=3, q=14$ 이므로
 $p+q=3+14=17$ 답 17
- 3 $f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & (x \geq -3) \\ -(x+3) & (x < -3) \end{cases}$ 이므로
- $$f(x)g(x) = \begin{cases} (x+3)(2x+a) & (x \geq -3) \\ -(x+3)(2x+a) & (x < -3) \end{cases}$$
- 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면
 $x = -3$ 에서 미분가능하므로
- $$\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x - (-3)}$$
- 이때
- $$\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{(x+3)(2x+a)}{x+3} (\because f(-3)g(-3)=0)$$
- $$= \lim_{x \rightarrow -3+} (2x+a) = -6+a,$$
- $$\lim_{x \rightarrow -3-} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{-(x+3)(2x+a)}{x+3}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow -3-} \{-(2x+a)\} = 6-a$$

이므로 $-6+a=6-a$

$$2a=12 \quad \therefore a=6$$

답 ③

- 4 $f(x) = |x-a| = \begin{cases} x-a & (x \geq a) \\ -(x-a) & (x < a) \end{cases}$ 이므로
- $$f(x)g(x) = \begin{cases} (x-a)(3x-12) & (x \geq a) \\ -(x-a)(3x-12) & (x < a) \end{cases}$$
- 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=a$ 에
 서 미분가능하므로
- $$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$
- 이때
- $$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x-a)(3x-12)}{x-a}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow a+} (3x-12) = 3a-12,$$
- $$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{-(x-a)(3x-12)}{x-a}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow a-} \{-(3x-12)\} = -3a+12$$
- 이므로 $3a-12 = -3a+12$
 $6a=24 \quad \therefore a=4$ 답 ④
- 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$
 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 $\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ($\because f(x)$ 는 연속함수) ㉠
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$
 또, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
 $\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ($\because f(x)$ 는 연속함수) ㉡
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$
 ㉠, ㉡에서 $f(x) = x(x-1)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하
 면
 $f'(x) = (x-1)(ax+b) + x(ax+b) + ax(x-1)$
 이때 $f'(0)=1, f'(1)=1$ 이므로
 $f'(0) = -b = 1 \quad \therefore b = -1$
 $f'(1) = a+b = 1, a-1 = 1 \quad \therefore a = 2$
 따라서 $f(x) = x(x-1)(2x-1)$ 이므로
 $f(2) = 2 \times 1 \times 3 = 6$ 답 ②

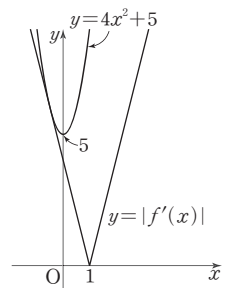
6 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = 4$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -2$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$
 $\therefore f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ ($\because f(x)$ 는 연속함수) ㉠
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = f'(-2) = 4$
또, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
 $\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ ($\because f(x)$ 는 연속함수) ㉡
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 4$
㉠, ㉡에서
 $f(x) = (x+2)(x-2)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x) = (x-2)(ax+b) + (x+2)(ax+b) + a(x+2)(x-2)$
이때 $f'(-2) = 4, f'(2) = 4$ 이므로
 $f'(-2) = -4(-2a+b) = 4 \quad \therefore -2a+b = -1$ ㉢
 $f'(2) = 4(2a+b) = 4 \quad \therefore 2a+b = 1$ ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}, b = 0$
따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x(x+2)(x-2)$ 이므로
 $f(4) = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 2 = 24$ ㉤

7 조건 ㉠에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)g(x) + 4\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = -4$
 $\therefore f(1)g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = -4$ ($\because f(x)g(x)$ 는 연속함수)
..... ㉠
이때 $f(1) = -2$ 이므로
 $-2g(1) = -4 \quad \therefore g(1) = 2$ ㉡
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - f(1)g(1)}{x-1}$ ($\because$ ㉠)
 $= f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$
 $= 8$ ㉢
한편, $g(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $g'(x) = a$
이므로 조건 ㉡의 $g(0) = g'(0)$ 에서 $b = a$
 $\therefore g(x) = ax + a$
㉡에서 $g(1) = a + a = 2 \quad \therefore a = 1$
따라서 $g'(x) = 1$ 이므로 $g'(1) = 1$ ㉣
 $f(1) = -2$ 와 ㉡, ㉣을 ㉢에 대입하면
 $f'(1) \times 2 + (-2) \times 1 = 8, 2f'(1) = 10$
 $\therefore f'(1) = 5$ ㉤

8 조건 ㉠에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - g(x)\} = 0$

$\therefore f(3) - g(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - g(x)\} = 0$
($\because f(x) - g(x)$ 는 연속함수)
 $\therefore f(3) = g(3)$ ㉠
이때 $f(3) = 2$ 이므로 $g(3) = 2$ ㉡
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x)}{x-3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\{f(x) - f(3)\} - \{g(x) - g(3)\}}{x-3}$ ($\because$ ㉠)
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x) - f(3)}{x-3} - \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \right\}$
 $= f'(3) - g'(3) = 1$ ㉢
한편, $g(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $g'(x) = a$
이므로 조건 ㉡의 $g(2) = g'(2)$ 에서
 $2a + b = a \quad \therefore b = -a$
 $\therefore g(x) = ax - a$
㉡에서 $g(3) = 3a - a = 2, 2a = 2 \quad \therefore a = 1$
따라서 $g'(x) = 1$ 이므로 $g'(3) = 1$ ㉣
㉢을 ㉢에 대입하면
 $f'(3) - 1 = 1 \quad \therefore f'(3) = 2$ ㉤

9 이차함수 $y = f(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 이고, 그래프의 대칭
축이 직선 $x = 1$ 이므로
 $f(x) = a(x-1)^2 + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)
라 하면
 $f'(x) = 2a(x-1)$
 $\therefore |f'(x)| = |2a(x-1)| = 2|a||x-1|$
 $|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$ 이므로 함수
 $y = |f'(x)|$ 의 그래프는 함수
 $y = 4x^2 + 5$ 의 그래프보다 아래쪽에 있
거나 오른쪽 그림과 같이 함수
 $y = |f'(x)|$ 의 그래프의 $x < 1$ 인 부분
이 함수 $y = 4x^2 + 5$ 의 그래프와 접해야
한다.
오른쪽 그림과 같이 접할 때,
 $|f'(x)| = 4x^2 + 5$ 에서
 $2|a||x-1| = 4x^2 + 5$
 $-2|a|(x-1) = 4x^2 + 5 \quad (\because x < 1)$
 $4x^2 + 2|a|x + 5 - 2|a| = 0$
위의 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = |a|^2 - 4(5 - 2|a|) = 0$
 $|a|^2 + 8|a| - 20 = 0, (|a| + 10)(|a| - 2) = 0$
 $\therefore |a| = 2 \quad (\because |a| > 0)$
따라서 $|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$ 를 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는
 $|a| \leq 2$, 즉 $-2 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 2 \quad (\because a \neq 0)$
따라서 실수 a 의 최댓값은 2이다.



다른풀이 부등식 $|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$,

즉 $2|a||x-1| \leq 4x^2 + 5$ 가 성립하려면 직선 $y = -2|a|(x-1)$ 이 함수 $y = 4x^2 + 5$ 의 그래프보다 아래쪽에 있거나 접해야 한다. 또, $|a|$ 의 값은 직선 $y = -2|a|(x-1)$ 이 함수 $y = 4x^2 + 5$ 의 그래프와 접할 때 최대이므로 접할 때의 $|a|$ 의 값을 구하자.

$g(x) = 4x^2 + 5$ 라 하면 $g'(x) = 8x$

직선 $y = -2|a|(x-1)$ 은 항상 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선이므로 점 $(1, 0)$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그 접선의 접점의 좌표를 $(t, 4t^2 + 5)$ ($t < 0$)라 하면 접선의 기울기는 $g'(t) = 8t$ 이고, 접선의 방정식은

$$y - (4t^2 + 5) = 8t(x - t) \quad \therefore y = 8tx - 4t^2 + 5$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 $0 = 8t - 4t^2 + 5$

$$4t^2 - 8t - 5 = 0, (2t - 5)(2t + 1) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} \quad (\because t < 0)$$

즉, 접점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, 6)$ 이므로 이것을 $y = -2|a|(x-1)$ 에 대입하면

$$6 = -2|a| \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right), 6 = 3|a| \quad \therefore |a| = 2$$

따라서 $|a|$ 의 최댓값은 2이므로 실수 a 의 최댓값은 2이다.

10 이차함수 $y = f(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 이고, 그래프의 대칭축이 직선 $x = -2$ 이므로

$f(x) = a(x+2)^2 + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2a(x+2)$$

$$\therefore |f'(x)| = |2a(x+2)| = 2|a||x+2|$$

$$|f'(x)| \leq x^2 + 5 \text{이므로 함수}$$

$y = |f'(x)|$ 의 그래프는 함수

$y = x^2 + 5$ 의 그래프보다 아래쪽에 있

거나 오른쪽 그림과 같이 함수

$y = |f'(x)|$ 의 그래프의

$x > -2$ 인 부분이 함수

$y = x^2 + 5$ 의 그래프와 접해야 한다.

오른쪽 그림과 같이 접할 때,

$$|f'(x)| = x^2 + 5 \text{에서 } 2|a||x+2| = x^2 + 5$$

$$2|a|(x+2) = x^2 + 5 \quad (\because x > -2)$$

$$\therefore x^2 - 2|a|x + 5 - 4|a| = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = |a|^2 - (5 - 4|a|) = 0$$

$$|a|^2 + 4|a| - 5 = 0, (|a| + 5)(|a| - 1) = 0$$

$$\therefore |a| = 1 \quad (\because |a| > 0)$$

따라서 $|f'(x)| \leq x^2 + 5$ 를 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는

$$|a| \leq 1, \text{ 즉 } -1 \leq a < 0 \text{ 또는 } 0 < a \leq 1 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 1이다.

답 ③

2 도함수의 활용 (1)

교과서 예제

p.99

01 (1) $f(x) = 6x - 5$ 라 하면 $f'(x) = 6$ 이므로 $f'(1) = 6$

(2) $f(x) = x^2 + x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 2x + 1$ 이므로 $f'(2) = 4 + 1 = 5$

(3) $f(x) = -x^3$ 이라 하면 $f'(x) = -3x^2$ 이므로 $f'(-1) = -3$

답 (1) 6 (2) 5 (3) -3

02 (1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 5$ 라 하면 $f'(x) = x + 6$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-2, -5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2) = -2 + 6 = 4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - (-5) = 4\{x - (-2)\} \quad \therefore y = 4x + 3$$

(2) $f(x) = 2x^2 - 3x$ 라 하면 $f'(x) = 4x - 3$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = 8 - 3 = 5$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = 5(x - 2) \quad \therefore y = 5x - 8$$

(3) $f(x) = 3x^3 - 4x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 9x^2 - 4$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = -4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 3 = -4(x - 0) \quad \therefore y = -4x + 3$$

답 (1) $y = 4x + 3$ (2) $y = 5x - 8$ (3) $y = -4x + 3$

03 (1) $f(x) = x^2 - 1$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 1)$ 이라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(t) = 2t = 4 \quad \therefore t = 2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = 4(x - 2) \quad \therefore y = 4x - 5$$

(2) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 1$ 이라 하면 $f'(x) = -3x^2 - 6x$

직선 $y = -9x + 1$ 에 평행한 직선의 기울기는 -9 이므로 접

점의 좌표를 $(t, -t^3 - 3t^2 + 1)$ 이라 하면

$$f'(t) = -3t^2 - 6t = -9, 3t^2 + 6t - 9 = 0$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t + 3)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, 1), (1, -3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -9\{x - (-3)\}, y - (-3) = -9(x - 1)$$

$$\therefore y = -9x - 26, y = -9x + 6$$

(3) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 이라 하면 $f'(x) = 4x + 3$

$$\therefore f'(-1) = -4 + 3 = -1$$

즉, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, -2)$ 에서의 접선의 기울기

가 -1이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - (-2) = 1 \times \{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = x - 1$$

답 (1) $y = 4x - 5$ (2) $y = -9x - 26$, $y = -9x + 6$
(3) $y = x - 1$

04 (1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 2x - 2$

점점의 좌표를 $(t, t^2 - 2t + 3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 2t - 2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - (t^2 - 2t + 3) = (2t - 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (2t - 2)x - t^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = 2t - 2 - t^2 + 3, t^2 - 2t = 0$$

$$t(t - 2) = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x + 3, y = 2x - 1$$

(2) $f(x) = x^3 + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2$

점점의 좌표를 $(t, t^3 + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2$

따라서 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + 1) = 3t^2(x - t)$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = -2t^3 + 1, 2t^3 + 2 = 0, t^3 + 1 = 0$$

$$(t + 1)(t^2 - t + 1) = 0 \quad \therefore t = -1 \quad (\because t^2 - t + 1 > 0)$$

$t = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = 3x + 3$$

답 (1) $y = -2x + 3$, $y = 2x - 1$ (2) $y = 3x + 3$

05 (1) 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 6$ 은 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하며 $f(0) = f(2) = 6$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간

$(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x - 2$ 이므로

$$f'(c) = 2c - 2 = 0 \quad \therefore c = 1$$

(2) 함수 $f(x) = -x^3 + 3x$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 미분가능하며 $f(-2) = f(1) = 2$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간

$(-2, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = -3x^2 + 3$ 이므로

$$f'(c) = -3c^2 + 3 = 0, -3c^2 = -3, c^2 = 1$$

$$\therefore c = -1 \quad (\because -2 < c < 1)$$

답 (1) 1 (2) -1

06 (1) 함수 $f(x) = x^2 + 1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x$ 이므로

$$\frac{5 - 2}{2 - (-1)} = 2c \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

(2) 함수 $f(x) = x^3 - 2x$ 는 닫힌구간 $[-3, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 0)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-3, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 2$ 이므로

$$\frac{0 - (-21)}{0 - (-3)} = 3c^2 - 2, 3c^2 = 9, c^2 = 3$$

$$\therefore c = -\sqrt{3} \quad (\because -3 < c < 0)$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\sqrt{3}$

07 함수 $f(x) = x^3 - 5x$ 는 닫힌구간 $[-2, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, a)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리가 성립하고, 평균값 정리를 만족시키는 실수 c ($-2 < c < a$)의 값이 -1이므로

$$\frac{f(a) - f(-2)}{a - (-2)} = f'(-1)$$

이때 $f(-2) = -8 + 10 = 2$ 이고, $f'(x) = 3x^2 - 5$ 에서

$$f'(-1) = 3 - 5 = -2$$
이므로

$$\frac{a^3 - 5a - 2}{a + 2} = -2, a^3 - 5a - 2 = -2a - 4$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0, (a - 1)^2(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > -1)$$

답 1

기출 Best | 1회

p.100~102

01 $f(x) = 2x^3 + ax + b$ 라 하면 $f'(x) = 6x^2 + a$

$$f(1) = 6$$
이므로

$$2 + a + b = 6 \quad \therefore a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(1) = 4$$
이므로

$$6 + a = 4 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-2 + b = 4 \quad \therefore b = 6$$

$$\therefore ab = -2 \times 6 = -12$$

답 ①

02 $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = -3(x - 2)^2 + 12$$

이므로 $f'(x)$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 12를 갖는다.

따라서 곡선 $y = -x^3 + 6x^2 + 1$ 의 접선의 기울기의 최댓값은 12이다.

답 ②

03 $f(x)=3x^2-8x+5$ 라 하면 $f(1)=0, f'(x)=6x-8$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=6-8=-2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+2$$

따라서 구하는 접선의 y 절편은 2이다.

답 ⑤

04 $f(x)=x^3-6x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(1, -5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3-6=-3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(-5)=-3(x-1) \quad \therefore y=-3x-2$$

곡선 $y=f(x)$ 와 접선 $y=-3x-2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3-6x=-3x-2 \text{에서 } x^3-3x+2=0$$

$$(x-1)^2(x+2)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

이때 $f(-2)=-8+12=4$ 이므로 $B(-2, 4)$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+\{4-(-5)\}^2}=3\sqrt{10}$$

답 ④

05 $f(x)=ax^2+bx+2$ 라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$$f(1)=3 \text{이므로 } a+b+2=3$$

$$\therefore a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선이 직선 $y=-\frac{1}{3}x+1$ 과 서로 수직이므로

$$f'(1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)=-1, (2a+b) \times \left(-\frac{1}{3}\right)=-1$$

$$\therefore 2a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-1$$

$$\therefore a-b=2-(-1)=3$$

답 ④

06 $f(x)=x^3-3x^2+x+4$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+1$

직선 $y=-2x+1$ 에 평행한 직선의 기울기는 -2 이므로 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+t+4) 라 하면

$$f'(t)=3t^2-6t+1=-2, 3t^2-6t+3=0$$

$$3(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=-2(x-1)$$

$$\therefore y=-2x+5$$

이 직선이 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k=-4+5=1$$

답 ①

07 $f(x)=x^3-3x^2+a$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+a) 라 하면 접선의 기울기가 -3 이므로

$$f'(t)=3t^2-6t=-3, 3t^2-6t+3=0$$

$$3(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$$

즉, 접점의 좌표는 $(1, a-2)$ 이고, 이 점이 직선 $y=-3x+5$

위의 점이므로

$$a-2=-3+5 \quad \therefore a=4$$

답 ④

08 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$ 이라 하면 $f'(x)=x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y=x-1$ 사이의 거리가 최소가 될 때는 점 P에서의 접선이 직선 $y=x-1$ 과 평행할 때이다.

$$P\left(t, \frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}\right) \text{이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 1이므로}$$

$$f'(t)=t=1$$

따라서 $P(1, 2)$ 이므로 점 P와 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

답 ②

참고 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

09 $f(x)=x^3-x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2=-2t^3, t^3-1=0, (t-1)(t^2+t+1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t^2+t+1>0)$$

$$t=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y=2x-2$$

따라서 구하는 접선의 x 절편은 1이다.

답 ④

10 $f(x)=x^2, g(x)=-x^2+8x+a$ 라 하면

$$f'(x)=2x, g'(x)=-2x+8$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하면

$$f(t)=g(t), f'(t)=g'(t)$$

$$f(t)=g(t) \text{에서 } t^2=-t^2+8t+a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } 2t=-2t+8, 4t=8 \quad \therefore t=2$$

$t=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$4=-4+16+a \quad \therefore a=-8$$

답 ⑤

참고 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 가지면

$$\textcircled{1} x=t \text{인 점에서 두 곡선이 만나므로 } f(t)=g(t)$$

$$\textcircled{2} x=t \text{인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로}$$

$$f'(t)=g'(t)$$

11 $f(x)=x^3, g(x)=ax^2+b$ 에서

$$f'(x)=3x^2, g'(x)=2ax$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 점 $(1, 1)$ 에서 만나므로

$$f(1)=g(1)=1$$

$$1=a+b \quad \therefore b=-a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 점 $(1, 1)$ 에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(1)g'(1)=-1$$

$$3 \times 2a = -1 \quad \therefore a = -\frac{1}{6}$$

$$a = -\frac{1}{6} \text{을 ㉠에 대입하면 } b = -\left(-\frac{1}{6}\right) + 1 = \frac{7}{6}$$

$$\text{따라서 } g(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6} \text{이므로}$$

$$g(2) = -\frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{1}{2}$$

답 ⑤

12 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 2x - 4$

점점의 좌표를 $(t, t^2 - 4t + 3)$ 이라 하면 점선의 기울기가 -2 이므로

$$f'(t) = 2t - 4 = -2, 2t = 2 \quad \therefore t = 1$$

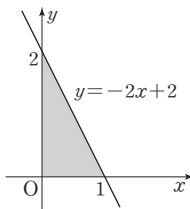
따라서 점점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 점선의 방정식은

$$y = -2(x - 1) \quad \therefore y = -2x + 2$$

이 직선의 x 절편은 1 , y 절편은 2 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

답 ③



13 $f(x) = 2x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 4x$

점 $P(t, 2t^2)$ 에서의 점선의 기울기는 $f'(t) = 4t$

$$\text{직선 CP의 기울기는 } \frac{2t^2 - a}{t - 0} = \frac{2t^2 - a}{t}$$

이때 점 P에서의 점선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$$4t \times \frac{2t^2 - a}{t} = -1 \quad \therefore a = 2t^2 + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} a = \lim_{t \rightarrow 0} \left(2t^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

답 ①

14 함수 $f(x) = x^3 - 9x$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(0) = f(3) = 0$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x) = 3x^2 - 9 \text{이므로}$$

$$f'(c) = 3c^2 - 9 = 0, 3c^2 = 9, c^2 = 3$$

$$\therefore c = \sqrt{3} (\because 0 < c < 3)$$

답 ③

15 함수 $f(x) = -x^3 + 4x + 3$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x) = -3x^2 + 4 \text{이므로}$$

$$\frac{6 - 0}{1 - (-1)} = -3c^2 + 4, 3c^2 = 1, c^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[-1 < -\frac{1}{\sqrt{3}} < 1, -1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \right]$$

따라서 모든 실수 c 의 값의 곱은

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

답 ①

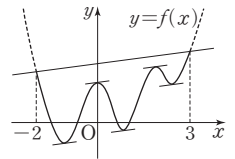
16 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 는 두 점 $(-2, f(-2)), (3, f(3))$ 을 잇는 직선의 기울기와 같은 미분 계수를 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(-2, f(-2)), (3, f(3))$ 을 잇는

직선과 평행한 접선을 5개 그릴 수 있

으므로 구하는 실수 c 의 개수는 5이다.



답 ⑤

기출 Best | 2회

p.103 ~ 105

01 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f(2) = -6 \text{이므로 } 8 + 4a + 2b = -6$$

$$4a + 2b = -14 \quad \therefore 2a + b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(2) = -3 \text{이므로}$$

$$12 + 4a + b = -3 \quad \therefore 4a + b = -15 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-4)^2 - 1^2 = 15$$

답 ①

02 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x - 1)^2 - 3$$

이므로 $f'(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값 -3 을 갖는다.

즉, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 점선의 기울기가 최소이고 최솟값이 -3 이므로

$$a = 1, k = -3$$

점 (a, b) , 즉 $(1, b)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$b = f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$\therefore a + b + k = 1 + 1 + (-3) = -1$$

답 ⑤

03 $f(x) = x^3 - 2$ 에서 $f(1) = 1 - 2 = -1, f'(x) = 3x^2$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 점선의 기울기는

$$f'(1) = 3$$

이므로 점선의 방정식은

$$y - (-1) = 3(x - 1) \quad \therefore y = 3x - 4$$

이 직선이 점 $(-3, a)$ 를 지나므로

$$a = -9 - 4 = -13$$

답 ①

04 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$ 라 하면 $f'(x) = -3x^2 + 6x + 1$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(2, 4)$ 에서의 점선의 기울기는

$$f'(2) = -12 + 12 + 1 = 1$$

이므로 점선의 방정식은

$$y - 4 = x - 2 \quad \therefore y = x + 2$$

곡선 $y=f(x)$ 와 접선 $y=x+2$ 의 교점의 x 좌표는
 $-x^3+3x^2+x-2=x+2$ 에서 $x^3-3x^2+4=0$
 $(x-2)^2(x+1)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$
 이때 $f(-1)=1+3-1-2=1$ 이므로 $B(-1, 1)$
 $\therefore AB=\sqrt{(-1-2)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$

답 ②

05 $f(x)=x^3+2x+3$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(-1)=3+2=5$

이므로 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$
 이다.

점 $(-1, 0)$ 을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{5}$ 인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{5}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore x+5y+1=0$$

따라서 $a=5, b=1$ 이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{5}$$

답 ②

06 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+5$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+12x-9$$

직선 $y=3x-2$ 와 평행한 직선의 기울기는 3이므로 접점의 좌표
 를 $(t, -t^3+6t^2-9t+5)$ 라 하면

$$f'(t)=-3t^2+12t-9=3, 3t^2-12t+12=0$$

$$3(t-2)^2=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=3(x-2)$$

$$\therefore y=3x-3$$

이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k=-6-3=-9$$

답 ③

07 $f(x)=-x^3+2x+a$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+2t+a)$ 라 하면 접선의 기울기가 -1 이
 므로

$$f'(t)=-3t^2+2=-1, -3t^2=-3, t^2=1 \quad \therefore t=\pm 1$$

(i) $t=-1$ 일 때

접점의 좌표는 $(-1, a-1)$ 이고, 이 점이 직선 $y=-x+1$
 위의 점이므로

$$a-1=1+1 \quad \therefore a=3$$

(ii) $t=1$ 일 때

접점의 좌표는 $(1, a+1)$ 이고, 이 점이 직선 $y=-x+1$ 위
 의 점이므로

$$a+1=-1+1 \quad \therefore a=-1$$

그런데 $a>0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3$

답 ①

08 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-16x-15$ ($x<0$)라 하면

$$f'(x)=3x^2-3x-16$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y=2x+10$ 사이의 거리가 최
 소가 될 때는 점 P에서의 접선이 직선 $y=2x+10$ 과 평행할 때
 이다.

즉, 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(a)=3a^2-3a-16=2$$

$$3a^2-3a-18=0, 3(a+2)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-2 \quad (\because a<0)$$

$$\therefore b=f(-2)=-8-6+32-15=3$$

$$\therefore ab=-2 \times 3=-6$$

답 ①

09 $f(x)=x^3-2x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+1) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기
 울기는

$$f'(t)=3t^2-2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2t+1)=(3t^2-2)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3=-2t^3+1, 2t^3+2=0, t^3+1=0$$

$$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1 \quad (\because t^2-t+1>0)$$

$$t=-1$$
을 ①에 대입하면 $y=x+3$

따라서 구하는 접선의 x 절편은 -3 이다.

답 ①

10 $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=-x^3+c$ 라 하면

$$f'(x)=2x+a, g'(x)=-3x^2$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 점 $(1, -2)$ 에서 공통인 접선을
 가지므로

$$f(1)=g(1)=-2, f'(1)=g'(1)$$

$$f(1)=g(1)=-2$$
에서

$$f(1)=1+a+b=-2, g(1)=-1+c=-2$$

$$\therefore a+b=-3, c=-1$$

$$f'(1)=g'(1)$$
에서

$$2+a=-3 \quad \therefore a=-5$$

$$a=-5$$
를 $a+b=-3$ 에 대입하면

$$-5+b=-3 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore (a-b) \times c = (-5-2) \times (-1) = 7$$

답 ②

11 $f(x)=ax^2+bx, g(x)=x^3+c$ 에서

$$f'(x)=2ax+b, g'(x)=3x^2$$

두 곡선이 점 $(-1, 1)$ 에서 만나므로

$$f(-1)=1$$
에서 $a-b=1$

$\cdots \cdots \textcircled{1}$

$$g(-1)=1$$
에서 $-1+c=1 \quad \therefore c=2$

또, 이 점에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(-1)g'(-1)=-1$$

$$(-2a+b) \times 3 = -1 \quad \therefore -6a+3b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{5}{3}$

$\therefore 9abc = 9 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) \times 2 = 20$

답 ②

12 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{2}{3}x$

점점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{3}t^2 + 1\right)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t) = \frac{2}{3}t$

따라서 접선의 방정식은

$y - \left(\frac{1}{3}t^2 + 1\right) = \frac{2}{3}t(x - t)$

$\therefore y = \frac{2}{3}tx - \frac{1}{3}t^2 + 1 \quad \dots\dots ①$

이 직선이 점 A(4, 5)를 지나므로

$5 = \frac{8}{3}t - \frac{1}{3}t^2 + 1, 15 = 8t - t^2 + 3$

$t^2 - 8t + 12 = 0, (t-2)(t-6) = 0$

$\therefore t = 2$ 또는 $t = 6$

이것을 ①에 대입하면

$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, y = 4x - 11$

오른쪽 그림과 같이 두 직선

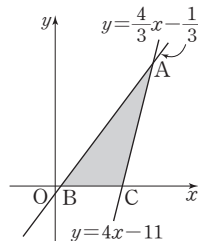
$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, y = 4x - 11$ 이

x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하면

$B\left(\frac{1}{4}, 0\right), C\left(\frac{11}{4}, 0\right)$

이므로

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{4}\right) \times 5 = \frac{25}{4}$



답 ②

13 $f(x) = x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$

점 P(t, t²)에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 2t$

C(0, a)라 하면 직선 CP의 기울기는 $\frac{t^2 - a}{t - 0} = \frac{t^2 - a}{t}$

이때 점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$2t \times \frac{t^2 - a}{t} = -1 \quad \therefore t^2 - a = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$

원의 반지름의 길이는

$\overline{CP} = \sqrt{(t-0)^2 + (t^2-a)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} \quad (\because ①)$

이므로 $S(t) = \pi \times \left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}\right)^2 = \pi\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)$

$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\pi\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$

답 ①

14 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하며 $f(-1) = f(2) = 3$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 이므로

$f'(c) = 3c^2 - 3 = 0, 3c^2 = 3, c^2 = 1$

$\therefore c = 1 \quad (\because -1 < c < 2)$

답 ④

15 함수 $f(x) = -2x^3 + 5x$ 에 대하여 닫힌구간 $[-2, k]$ 에서 평균 값 정리를 만족시키는 실수 c의 값이 -1이므로

$\frac{f(k) - f(-2)}{k - (-2)} = f'(-1)$

이때 $f'(x) = -6x^2 + 5$ 이므로 $f'(-1) = -6 + 5 = -1$ 이고

$\frac{-2k^3 + 5k - 6}{k + 2} = -1, -2k^3 + 5k - 6 = -k - 2$

$2k^3 - 6k + 4 = 0, k^3 - 3k + 2 = 0, (k-1)^2(k+2) = 0$

$\therefore k = 1 \quad (\because k > -1)$

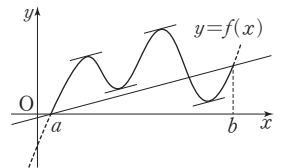
답 ④

16 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 를 만족시키는 실수

c는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 구하는 실수 c의 개수는 4이다.

답 ④



변형유형 집중공략

p.106 ~ 107

1-1 $f(x) = x^2 - 2x$ 라 하면 $f'(x) = 2x - 2$

두 점 O(0, 0), A(3, 3)을 지나는 직선의 방정식은 $y = x$ 이므로 삼각형 OPA의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y = x$ 과 평행할 때이다.

$P(t, t^2 - 2t)$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t) = 2t - 2 = 1, 2t = 3 \quad \therefore t = \frac{3}{2}$

따라서 $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ 이므로 점 P와 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$

사이의 거리는

$\frac{\left|\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}$

이때 $\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$S = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{27}{8}$

$\therefore 8S = 8 \times \frac{27}{8} = 27$

답 27

1-2 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2$

두 점 A(0, 4), B(-4, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$y - 4 = \frac{4 - 0}{0 - (-4)}x \quad \therefore y = x + 4$

따라서 삼각형 ABP의 넓이가 최소가 될 때는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y=x+4$ 와 평행할 때이다.

$P(t, t^3-2t+1)$ 이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=3t^2-2=1, 3t^2=3, t^2=1$

$$\therefore t=-1 (\because t \leq 0)$$

따라서 P(-1, 2)이므로 점 P와 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

답 2

2-1 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다. 이때 조건 (나)에서 $f'(c) \leq 7$ 이므로

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} \leq 7, \frac{f(4)+3}{4} \leq 7 (\because \text{조건 (나)})$$

$$f(4)+3 \leq 28 \quad \therefore f(4) \leq 25$$

따라서 $f(4)$ 의 최댓값은 25이다.

답 ③

2-2 $-1 < t \leq 3$ 인 임의의 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, t]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, t)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(t)-f(-1)}{t-(-1)}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-1, t)$ 에 적어도 하나 존재한다.

즉, $-1 < c < t \leq 3$ 에서 $-1 < c < 3$ 이므로 조건 (나)에서

$$1 \leq f'(c) \leq 4, 1 \leq \frac{f(t)-f(-1)}{t-(-1)} \leq 4$$

$$1 \leq \frac{f(t)-4}{t+1} \leq 4 (\because \text{조건 (나)})$$

$$t+1 \leq f(t)-4 \leq 4(t+1) (\because t+1 > 0)$$

$$\therefore t+5 \leq f(t) \leq 4t+8$$

따라서 $6 \leq f(1) \leq 12$ 이므로 $f(1)$ 의 최솟값은 6이다.

답 6

서술형 What & How

p.108~111

1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = -4$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+2\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 (\because f(x) \text{는 연속함수}) \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= f'(1) = -4 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (-2) = -4(x-1)$$

$$\therefore y = -4x + 2$$

따라서 $a = -4, b = 2$ 이므로

$$ab = -4 \times 2 = -8 \quad \dots\dots ③$$

답 -8

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-3}{x} = 2$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-3\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

$$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 (\because f(x) \text{는 연속함수}) \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= f'(0) = 2 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

점 $(0, f(0))$, 즉 $(0, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=2(x-0) \quad \therefore y=2x+3$$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로

$$a+b=2+3=5 \quad \dots\dots ③$$

답 5

채점기준	배점
① $f(0)$ 의 값 구하기	2
② $f'(0)$ 의 값 구하기	1
③ $a+b$ 의 값 구하기	2

3 $f(x) = x^2 + kx - \frac{1}{2}$ 이라 하면 $f'(x) = 2x + k$

접점의 좌표를 $(t, t^2 + kt - \frac{1}{2})$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = 2t + k$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - \left(t^2 + kt - \frac{1}{2}\right) = (2t + k)(x - t)$$

$$\therefore y = (2t + k)x - t^2 - \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

이 직선이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = -t^2 - \frac{1}{2}$$

$$t^2 = \frac{5}{2} \quad \therefore t = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \dots\dots ②$$

이때 점 $(0, -3)$ 에서 곡선에 그은 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)f'\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -1$$

$$\left(2\sqrt{\frac{5}{2}} + k\right)\left(-2\sqrt{\frac{5}{2}} + k\right) = -1$$

$$k^2 - 4 \times \frac{5}{2} = -1, k^2 = 9$$

$$\therefore k=3 (\because k>0)$$

..... ③

답 3

4 $f(x)=2x^2+5x+\frac{21}{4}$ 이라 하면 $f'(x)=4x+5$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2+5t+\frac{21}{4})$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=4t+5$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - \left(2t^2 + 5t + \frac{21}{4}\right) = (4t+5)(x-t)$$

$$\therefore y = (4t+5)x - 2t^2 + \frac{21}{4} \quad \text{..... ①}$$

이 직선이 점 $(0, k)$ 를 지나므로

$$k = -2t^2 + \frac{21}{4}, 2t^2 = \frac{21}{4} - k, t^2 = \frac{21-4k}{8}$$

$$\therefore t = \pm \sqrt{\frac{21-4k}{8}} \quad \text{..... ②}$$

이때 점 $(0, k)$ 에서 곡선에 그은 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'\left(\sqrt{\frac{21-4k}{8}}\right)f'\left(-\sqrt{\frac{21-4k}{8}}\right) = -1$$

$$\left(4\sqrt{\frac{21-4k}{8}}+5\right)\left(-4\sqrt{\frac{21-4k}{8}}+5\right) = -1$$

$$25 - 16 \times \frac{21-4k}{8} = -1, 25 - 2(21-4k) = -1$$

$$-2(21-4k) = -26, 21-4k=13$$

$$-4k = -8 \quad \therefore k=2 \quad \text{..... ③}$$

답 2

채점기준	배점
① 접점의 x좌표를 t라 하고 접선의 방정식 세우기	2
② t를 k에 대한 식으로 나타내기	2
③ k의 값 구하기	3

5 $y=x^4-ax^2+2ax+4$ 에서 $x^4-y+4-ax(x-2)=0$

위의 등식이 a에 대한 항등식이므로

$$x^4-y+4=0, x(x-2)=0 \quad \text{..... ①}$$

$$x(x-2)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$$x=0 \text{일 때, } y=4$$

$$x=2 \text{일 때, } y=2^4+4=20$$

즉, 곡선 $y=x^4-ax^2+2ax+4$ 는 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0, 4), (2, 20)$ 을 지난다. ②

이때 $f(x)=x^4-ax^2+2ax+4$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-2ax+2a$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0, 4), (2, 20)$ 에서의 접선의 기울기는 각각

$$f'(0)=2a, f'(2)=32-4a+2a=32-2a$$

그런데 두 점에서의 접선이 서로 평행하므로 기울기는 같다. 즉,

$$2a=32-2a, 4a=32 \quad \therefore a=8 \quad \text{..... ③}$$

답 8

6 $y=2x^3+ax^2-3ax-1$ 에서 $2x^3-y-1+ax(x-3)=0$

위의 등식이 a에 대한 항등식이므로

$$2x^3-y-1=0, x(x-3)=0 \quad \text{..... ①}$$

$$x(x-3)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$x=0 \text{일 때, } y=-1$$

$$x=3 \text{일 때, } y=2 \times 3^3-1=53$$

즉, 곡선 $y=2x^3+ax^2-3ax-1$ 은 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0, -1), (3, 53)$ 을 지난다. ②

이때 $f(x)=2x^3+ax^2-3ax-1$ 이라 하면

$$f'(x)=6x^2+2ax-3a$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0, -1), (3, 53)$ 에서의 접선의 기울기는 각각

$$f'(0)=-3a, f'(3)=54+6a-3a=3a+54$$

그런데 두 점에서의 접선이 서로 평행하므로 기울기는 같다. 즉,

$$-3a=3a+54$$

$$-6a=54 \quad \therefore a=-9 \quad \text{..... ③}$$

답 -9

채점기준	배점
① 주어진 함수식이 a에 대한 항등식이 될 조건 구하기	1
② 곡선이 항상 지나는 두 점의 좌표 구하기	2
③ a의 값 구하기	3

7 곡선 $y=x^2+5x+8$ 위의 임의의 한 점을 $P(t, t^2+5t+8)$ 이라 하자.

원 $x^2+y^2=4$ 의 중심은 원점 O이

므로 곡선 $y=x^2+5x+8$ 위의

점 P와 원 위의 점 사이의 거리가

최소일 때는 오른쪽 그림과 같이

점 P에서의 접선이 직선 OP와 수

직일 때이다. ①

$$f(x)=x^2+5x+8 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=2x+5$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t+5$$

$$\text{직선 OP의 기울기는 } \frac{t^2+5t+8}{t}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 OP가 수직이므로

$$(2t+5) \times \frac{t^2+5t+8}{t} = -1$$

$$(2t+5)(t^2+5t+8) = -t (\because t \neq 0)$$

$$2t^3+15t^2+42t+40=0, (t+2)(2t^2+11t+20)=0$$

$$\therefore t=-2 (\because 2t^2+11t+20>0) \quad \text{..... ②}$$

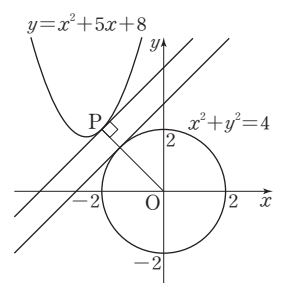
따라서 $P(-2, 2), \overline{OP} = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로 구하는 거리의 최솟값은

$$2\sqrt{2}-2$$

$$\text{즉, } m=-2, n=2 \text{이므로}$$

$$mn=-2 \times 2=-4 \quad \text{..... ③}$$

답 -4



참고 $t=0$ 이면 $P(0, 8)$ 이므로 점 P와 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 사이의 거리는 $8-2=6$ 이다.

- 8 곡선 $y=x^2-6x+9$ 위의 임의의 한 점을 $P(t, t^2-6t+9)$ 라 하자.

원 $x^2+y^2=2$ 의 중심은 원점

O이므로 곡선

$y=x^2-6x+9$ 위의 점 P와

원 위의 점 사이의 거리가 최

소일 때는 오른쪽 그림과 같이

점 P에서의 접선이 직선 OP

와 수직일 때이다.

$f(x)=x^2-6x+9$ 라 하면

$f'(x)=2x-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t-6$

직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2-6t+9}{t}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 OP가 수직이므로

$$(2t-6) \times \frac{t^2-6t+9}{t} = -1$$

$$(2t-6)(t^2-6t+9) = -t \quad (\because t \neq 0)$$

$$2t^3-18t^2+55t-54=0$$

$$(t-2)(2t^2-14t+27)=0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because 2t^2-14t+27 > 0)$$

따라서 $P(2, 1)$, $\overline{OP} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ 이므로 구하는 거리의 최솟값은

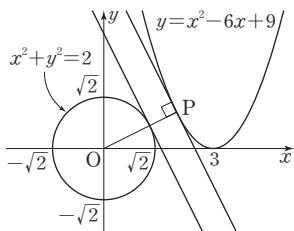
$$\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

즉, $m=5$, $n=2$ 이므로

$$mn=5 \times 2=10$$

답 10

채점기준	배점
① 곡선 위의 점과 원 위의 점 사이의 거리가 최소인 경우 설명하기	2
② 조건을 만족시키는 곡선 $y=x^2-6x+9$ 위의 점의 x 좌표 구하기	3
③ mn 의 값 구하기	1



..... ①

- 02 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 9이므로

$$f'(2)=9$$

$\frac{1}{n}=h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left\{ f\left(2 + \frac{1}{4n}\right) - f(2) \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(2 + \frac{h}{4}\right) - f(2)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f\left(2 + \frac{h}{4}\right) - f(2)}{\frac{h}{4}} \times \frac{1}{12} \right\} \\ &= \frac{1}{12} f'(2) \\ &= \frac{1}{12} \times 9 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 03 $f(x)=3x^3+9x^2-5$ 라 하면 $f'(x)=9x^2+18x$

점 A의 x 좌표가 -3 이므로 점 A에서의 접선의 기울기는

$$f'(-3)=81-54=27$$

$B(a, 3a^3+9a^2-5)$ ($a \neq -3$)라 하면 점 B에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=9a^2+18a$$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로

$$f'(-3)=f'(a)$$

$$27=9a^2+18a, \quad a^2+2a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a \neq -3)$$

즉, $B(1, 7)$ 이므로 점 B에서의 접선의 방정식은

$$y-7=27(x-1) \quad \therefore y=27x-20$$

따라서 구하는 y 절편은 -20 이다.

답 ①

- 04 $g(x)=x^3+2x$ 라 하면 $g'(x)=3x^2+2$

점 $P(t, t^3+2t)$ 에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=3t^2+2$ 이므로

접선의 방정식은

$$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$$

$$\therefore (3t^2+2)x-y-2t^3=0$$

이 접선과 원점 사이의 거리 $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{|-2t^3|}{\sqrt{(3t^2+2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2t^3|}{\sqrt{9t^4+12t^2+5}}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|2t^3|}{t \sqrt{9t^4+12t^2+5}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2}{\sqrt{9t^4+12t^2+5}} \quad (\because t > 0)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{9 + \frac{12}{t^2} + \frac{5}{t^4}}} = \frac{2}{3}$$

답 ②

- 05 $f(x)=-x^3+3x^2+2$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$$

이므로 $f'(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 3을 갖는다.

$f(1)=4$ 이므로 점 $(1, 4)$ 를 지나고 기울기가 3인 접선의 방정식

$$\text{은 } y-4=3(x-1) \quad \therefore y=3x+1$$

답 ④

실전 문제 | 1회

p.112~115

- 01 $f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}x^2+ax$ 에서 $f'(x)=\sqrt{5}x+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$ 에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(-1)f'(1)=-1$$

$$(-\sqrt{5}+a)(\sqrt{5}+a)=-1, \quad -5+a^2=-1$$

$$a^2=4 \quad \therefore a=2 \quad (\because a > 0)$$

답 ④

06 두 점 (1, 1), (3, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{3-1}(x-1) \quad \therefore y=2x-1 \rightarrow \text{곡선 } y=f(x) \text{ 위의 점 } (1, 1) \text{ 에서의 접선의 방정식}$$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(1)=3+2a+b=2 \quad \therefore b=-2a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\therefore f(x)=x^3+ax^2+(-2a-1)x+c$$

두 점 (1, 1), (3, 5)가 모두 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=1, f(3)=5$$

$$f(1)=1+a+(-2a-1)+c=1 \text{에서}$$

$$-a+c=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f(3)=27+9a+3(-2a-1)+c=5 \text{에서}$$

$$3a+c=-19 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-5, c=-4$

$$a=-5 \text{를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } b=-2 \times (-5)-1=9$$

따라서 $f'(x)=3x^2-10x+9$ 이므로

$$f'(2)=12-20+9=1 \quad \text{답 ④}$$

다른풀이 두 점 (1, 1), (3, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{3-1}(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x-1$ 이 점 (1, 1)에서 접하고 점 (3, 5)에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)=2x-1$, 즉 $f(x)-2x+1=0$ 은 $x=1$ 을 중근으로 갖고 $x=3$ 을 한 근으로 갖는다. 이때 삼차식 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-(2x-1)=(x-1)^2(x-3)$$

$$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-3)+2x-1$$

$$=x^3-5x^2+9x-4$$

따라서 $f'(x)=3x^2-10x+9$ 이므로

$$f'(2)=12-20+9=1$$

07 $f(x)=2x^3+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=6x^2+a$

$$f(-1)=3 \text{이므로 } -2-a+b=3$$

$$\therefore b=a+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

점 (-1, 3)에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=a+6$$

접선과 수직인 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$(a+6) \times \frac{1}{2} = -1, a+6 = -2 \quad \therefore a = -8$$

$$a = -8 \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } b = -3$$

$$\therefore ab = -8 \times (-3) = 24 \quad \text{답 ④}$$

08 $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+3$

점점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+3t+1)이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$$f'(t)=3t^2-6t+3=3, 3t^2-6t=0$$

$$3t(t-2)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

즉, 점점의 좌표는 (0, 1), (2, 3)이므로 두 점점의 방정식은

$$y-1=3x, y-3=3(x-2)$$

$$\therefore y=3x+1, y=3x-3$$

따라서 직선 $y=3x+1$ 위의 점 (0, 1)과 직선 $y=3x-3$, 즉

$$3x-y-3=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|0-1-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad \text{답 ④}$$

09 $f(x)=3x^2-2ax+2f(1)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=3-2a+2f(1) \quad \therefore f(1)=2a-3$$

따라서

$$f(x)=3x^2-2ax+2(2a-3)$$

$$=3x^2-2ax+4a-6$$

$$\text{이므로 } f'(x)=6x-2a$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 방정식이

$$y=ax+b \text{이므로 접선의 기울기는 } a \text{이다.}$$

$$\text{즉, } f'(1)=a \text{이므로 } 6-2a=a$$

$$-3a=-6 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore f(1)=2 \times 2-3=1, f'(1)=2$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

$$\therefore b=-1$$

$$\therefore ab=2 \times (-1) = -2 \quad \text{답 ⑤}$$

10 $f(x)=x^3+3x^2+2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+6x+2$

점점의 좌표를 (t, t^3+3t^2+2t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2+6t+2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^3+3t^2+2t)=(3t^2+6t+2)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+6t+2)x-2t^3-3t^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이 직선이 점 (0, -1)을 지나므로

$$-1=-2t^3-3t^2, 2t^3+3t^2-1=0$$

$$(t+1)^2(2t-1)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

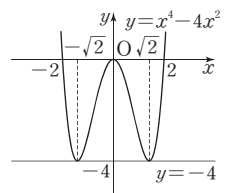
이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=-x-1, y=\frac{23}{4}x-1$$

따라서 접선은 2개이다. 답 ③

참고 한 개의 접선이 곡선 위의 두 개 이상의 점에서 곡선에 접할 수 있으므로 점점의 x 좌표가 2개라고 해서 접선이 항상 2개인 것은 아니다.

예 오른쪽 그림과 같이 점 (0, -4)에서 곡선 $y=x^4-4x^2$ 에 그은 접선의 점점의 x 좌표는 $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 의 2개이지만 접선은 직선 $y=-4$ 의 1개뿐이다.



11 $f(x)=x^3+ax$ 에서 $f'(x)=3x^2+a$

접점의 좌표를 (t, t^3+at) 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2+a$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at)=(3t^2+a)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2=-2t^3, 2t^3+2=0, t^3+1=0$$

$$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1 (\because t^2-t+1>0)$$

접선의 기울기가 5이므로

$$f'(t)=f'(-1)=5, 3+a=5 \quad \therefore a=2$$

따라서 $f(x)=x^3+2x$ 이므로

$$f(a)=f(2)=8+4=12$$

답 ③

12 $f(x)=x^2$ 에서 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2 \text{이므로 직선 } l \text{의 방정식은}$$

$$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

직선 l 과 곡선 $y=g(x)$ 가 접하므로 이차방정식

$$2x-1=-(x-3)^2+k, \text{ 즉 } x^2-4x+8-k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

은 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(8-k)=0 \quad \therefore k=4$$

$k=4$ 를 ①에 대입하면 접점 Q 의 x 좌표는

$$x^2-4x+4=0, (x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$$

$$\therefore Q(2, 3)$$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$-(x-3)^2+4=0 \text{에서}$$

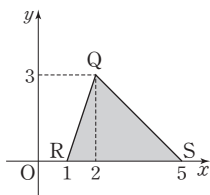
$$(x-3)^2=4, x-3=\pm 2 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 두 점 R, S 의 좌표는 $(1, 0)$,

$$(5, 0) \text{이므로}$$

$$\triangle QRS=\frac{1}{2} \times (5-1) \times 3=6$$

답 ⑤



13 $f(x)=x^2-4$ 라 하면 $f'(x)=2x$

원 O 와 곡선 $y=f(x)$ 의 접점을

$P(t, t^2-4)$ 라 하면 점 P 에서의 접

선의 기울기는 $f'(t)=2t$

직선 OP 의 기울기는 $\frac{t^2-4}{t}$

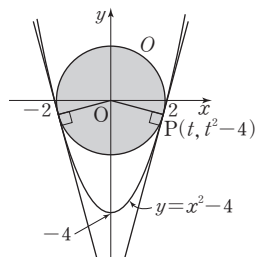
이때 점 P 에서의 접선과 직선 OP

는 서로 수직이므로

$$2t \times \frac{t^2-4}{t} = -1, 2t^2-8=-1$$

$$2t^2=7, t^2=\frac{7}{2} \quad \therefore t=\pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\text{즉, 접점의 좌표는 } \left(-\frac{\sqrt{14}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{14}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



따라서 원 O 의 반지름의 길이는

$$OP=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

이므로 원 O 의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}\pi$$

답 ②

14 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[x-5, x+1]$ 에서 연속이고 열린구간

$(x-5, x+1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+1)-f(x-5)}{(x+1)-(x-5)}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(x-5, x+1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+1)-f(x-5)\} = 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)-f(x-5)}{(x+1)-(x-5)}$$

$$= 6 \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c)$$

$$= 6 \times (-3) = -18$$

답 ④

15 ㄱ. 조건 ㉠에서 $f(0)=-f(0)$

$$2f(0)=0 \quad \therefore f(0)=0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 조건 ㉡에서 $f(3)=0$, ㄱ에서 $f(0)=0$

$$\text{조건 ㉠에서 } f(-3)=-f(3)=0$$

함수 $f(x)$ 는 두 닫힌구간 $[-3, 0]$, $[0, 3]$ 에서 각각 연속이고 두 열린구간 $(-3, 0)$, $(0, 3)$ 에서 각각 미분가능하며

$f(-3)=f(0)=0$, $f(0)=f(3)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f(c_1)=0$ 인 실수 c_1 이 열린구간 $(-3, 0)$ 에, $f(c_2)=0$ 인 실수 c_2 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

즉, $f'(c)=0$ 인 실수 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 2개 존재한다. (참)

ㄷ. 조건 ㉢에서 $f(1)=3$, ㄱ에서 $f(0)=0$

$$\text{조건 ㉠에서 } f(-1)=-f(1)=-3$$

함수 $f(x)$ 는 두 닫힌구간 $[-1, 0]$, $[0, 1]$ 에서 각각 연속이고 두 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 에서 각각 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{0-(-3)}{1}=3=f'(c_1)$$

을 만족시키는 c_1 이 열린구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다. 또,

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{3-0}{1}=3=f'(c_2)$$

를 만족시키는 c_2 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f'(c)=3$ 인 실수 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 2개 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16 조건 ㉡에서 $f(x+1)-f(1)=x^3+2x^2+5x$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(2)-f(1)=8, 3f(1)-f(1)=8 (\because \text{조건 ㉠})$$

$$2f(1)=8 \quad \therefore f(1)=4$$

이때 조건 (가)에서

$$f(1+h)-f(1)=h^3+2h^2+5h$$

이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3+2h^2+5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2+2h+5) = 5$$

$$\therefore f'(1)=5$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=5$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-4=5(x-1) \quad \therefore y=5x-1 \quad \text{답 ③}$$

- 17 x 의 값이 0에서 h 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율이 $2h^2$ 이므로

$$\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=2h^2$$

$$f(h)-f(0)=2h^3 \quad \therefore f(h)=2h^3+f(0)$$

$$\text{즉, } f(x)=2x^3+f(0) \text{이므로 } f'(x)=6x^2$$

다항함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 이때

$$f(3)=54+f(0), f(1)=2+f(0), f'(c)=6c^2$$

이므로

$$\frac{\{54+f(0)\}-\{2+f(0)\}}{3-1}=6c^2$$

$$26=6c^2, c^2=\frac{13}{3} \quad \therefore c=\frac{\sqrt{39}}{3} (\because 1 < c < 3) \quad \text{답 ⑤}$$

- 18 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2}=3$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-2\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)=2$$

$$\therefore f(2)=\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=2 (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)=3 \quad \text{..... ①}$$

$$g(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1 \text{에서 } g'(x)=2x-2 \text{이므로}$$

$$g(2)=1, g'(2)=4-2=2 \quad \text{..... ②}$$

$h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$h(2)=f(2)g(2)=2 \times 1=2$$

$$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$$

$$=3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$$

따라서 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(2, f(2)g(2))$, 즉 곡선

$y=h(x)$ 위의 점 $(2, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-2=7(x-2) \quad \therefore y=7x-12 \quad \text{..... ③}$$

즉, $a=7, b=-12$ 이므로

$$ab=7 \times (-12) = -84 \quad \text{..... ④}$$

$$\text{답 } -84$$

채점기준	배점
① $f(2), f'(2)$ 의 값 구하기	2
② $g(2), g'(2)$ 의 값 구하기	1
③ 접선의 방정식 구하기	2
④ ab 의 값 구하기	1

- 19 $f(x)=x^4-9x^2$ 이라 하면 $f'(x)=4x^3-18x$

점점의 좌표를 (t, t^4-9t^2) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=4t^3-18t$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^4-9t^2)=(4t^3-18t)(x-t)$$

$$\therefore y=(4t^3-18t)x-3t^4+9t^2 \quad \text{..... ①}$$

이 직선이 점 $A(0, -12)$ 를 지나므로

$$-12=-3t^4+9t^2, 3t^4-9t^2-12=0, t^4-3t^2-4=0$$

$$(t+2)(t-2)(t^2+1)=0$$

$$\therefore t=\pm 2 (\because t^2+1>0) \quad \text{..... ②}$$

즉, 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2, -20), (2, -20)$ 이므로

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times \{2-(-2)\} \times \{-12-(-20)\}$$

$$=16 \quad \text{..... ③}$$

답 16

채점기준	배점
① 점점의 좌표를 (t, t^4-9t^2) 이라 하고 접선의 방정식 세우기	2
② t 의 값 구하기	2
③ 삼각형 APQ의 넓이 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.116~119

- 01 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f(2)=-1, f'(2)=2$$

이때 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$ 이므로

$$g'(2)=3 \times 2^2 \times f(2) + 2^3 \times f'(2)$$

$$=3 \times 4 \times (-1) + 8 \times 2 = 4$$

답 ④

- 02 점 $(2, -3)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(2)=-3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -3)$ 에서의 접선과 직선

$$y=-\frac{1}{5}x+1 \text{이 서로 수직이므로}$$

$$f'(2) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \quad \therefore f'(2)=5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-2f(2)-\{xf(2)-2f(2)\}}{x-2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\{f(x) - f(2)\} - f(2)(x-2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ 2 \times \frac{f(x) - f(2)}{x-2} - f(2) \right\} \\
 &= 2f'(2) - f(2) \\
 &= 2 \times 5 - (-3) = 13
 \end{aligned}$$

답 ③

03 $f(x) = x^3 - x^2 + m$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - t^2 + m) = (3t^2 - 2t)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2 + m$$

$$\therefore g(t) = -2t^3 + t^2 + m$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{g(t) - 3}{t - 2} = n \text{에서 극한값이 존재하고 } t \rightarrow 2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{t \rightarrow 2} \{g(t) - 3\} = 0 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = 3$$

$$\therefore g(2) = \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = 3 \quad (\because g(t) \text{는 연속함수})$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{t \rightarrow 2} \frac{g(t) - 3}{t - 2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{g(t) - g(2)}{t - 2} \\
 &= g'(2) = n
 \end{aligned}$$

$g(2) = 3$ 에서

$$-16 + 4 + m = 3 \quad \therefore m = 15$$

또, $g'(t) = -6t^2 + 2t$ 이므로

$$g'(2) = -24 + 4 = n \quad \therefore n = -20$$

$$\therefore m + n = 15 + (-20) = -5$$

답 ②

04 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 12 + 10 = 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y - 1 = x - 1 \quad \therefore y = x$

직선 $y=x$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는

점의 x 좌표는

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = x \text{에서}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

$$(x-1)^2(x-4) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

$$\therefore A(4, 4)$$

또, 곡선 $y=f(x)$ 가 y 축과 만나는 점

의 좌표는 $(0, -4)$ 이므로 $B(0, -4)$

점 $B(0, -4)$ 와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0 - (-4)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$AP = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 6$$

답 ②

05 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식이

$$y = 2x + 3 \text{이므로}$$

$$f(1) = 2 + 3 = 5, f'(1) = 2$$

이때 $g(x) = xf(x)$ 에서

$$g(1) = f(1) = 5$$

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) \text{이므로}$$

$$g'(1) = f(1) + f'(1) = 5 + 2 = 7$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 5)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 5 = 7(x - 1) \quad \therefore y = 7x - 2$$

즉, $h(x) = 7x - 2$ 이므로

$$h(2) = 14 - 2 = 12$$

답 ④

06 $f(x) = x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$

점 $P(a, a^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = 2a$ 이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \quad \therefore y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \text{에서 } x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right) = 0$$

$$\therefore x=a \text{ 또는 } x=-a-\frac{1}{2a}$$

따라서 $Q\left(-a-\frac{1}{2a}, \left(-a-\frac{1}{2a}\right)^2\right), P'\left(-a-\frac{1}{2a}, a^2\right)$ 이므로

$$\overline{QP'} = \left(-a-\frac{1}{2a}\right)^2 - a^2 = 1 + \frac{1}{4a^2}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \overline{QP'} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right) = 1$$

답 ②

07 조건 (가)에서 $f(-1)=f(1)=f(2)=k$ (k 는 상수)라 하면

$$f(x) = a(x+1)(x-1)(x-2) + k \quad (a \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 할 수 있으므로

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= a(x-1)(x-2) + a(x+1)(x-2) + a(x+1)(x-1) \\
 &= a(3x^2 - 4x - 1)
 \end{aligned}$$

조건 (나)에서

$$f'(1) = -2a = 4 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore f(x) = -2(x+1)(x-1)(x-2) + k,$$

$$f'(x) = -2(3x^2 - 4x - 1)$$

조건 (다)에서

$$f(-2) = -2 \times (-1) \times (-3) \times (-4) + k = 24 + k = 18$$

$$\therefore k = -6$$

$$\therefore f(x) = -2(x+1)(x-1)(x-2) - 6$$

따라서

$$f(0) = -2 \times 1 \times (-1) \times (-2) - 6 = -10,$$

$$f'(0) = 2$$

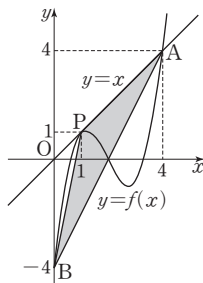
이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$, 즉 $(0, -10)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (-10) = 2x \quad \therefore y = 2x - 10$$

즉, $m=2, n=-10$ 이므로

$$mn = 2 \times (-10) = -20$$

답 ⑤



- 08 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선이 직선 $x+y-3=0$ 에 접하므로 직선 $x+y-3=0$ 을 x 축의 방향으로 $-m$ 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선 $(x+m)+(y+3)-3=0$, 즉 $y=-x-m$ 이 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$ 에 접한다.
 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+2$
 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2t) 라 하면 접선의 기울기가 -1 이므로
 $f'(t)=3t^2-6t+2=-1, 3t^2-6t+3=0$
 $3(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$
 따라서 접점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y=-(x-1) \quad \therefore y=-x+1 \leftarrow y=-x-m$ 과 일치한다.
 즉, $-m=1$ 이므로 $m=-1$ 답 ②

- 09 $f(x)=\frac{3}{4}x(x-2)^2=\frac{3}{4}x^3-3x^2+3x$ 에서
 $f'(x)=\frac{9}{4}x^2-6x+3$
 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 OA와 평행할 때이다. 따라서 $P(t, f(t))$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 $\frac{5}{4}$ 이므로
 $f'(t)=\frac{9}{4}t^2-6t+3=\frac{5}{4}, 9t^2-24t+7=0$
 $(3t-1)(3t-7)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{3} (\because 0 < t < 2)$ 답 ②

- 10 $\neg$. $t=3$ 일 때, 점 $P(3, 0)$ 은 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ 위의 점이다.

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x \text{라 하면 } g'(x)=x-\frac{3}{2}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $P(3, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(3)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=\frac{3}{2}(x-3) \quad \therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2} \text{ (참)}$$

$\neg$. 점 $P(t, -t+3)$ 은 직선 $y=-x+3$ 위의 점이다.

직선 $y=-x+3$ 과 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x=-x+3 \text{에서 } x^2-3x=-2x+6$$

$$x^2-x-6=0, (x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

즉, 직선 $y=-x+3$ 과 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ 는 두 점

$(-2, 5), (3, 0)$ 에서 만난다.

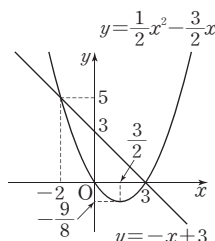
따라서 점 $P(t, -t+3)$ 에서 곡선

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x \text{에 그을 수 있는 접선}$$

은

$t < -2$ 또는 $t > 3$ 일 때 2개이므로

$$f(t)=2$$

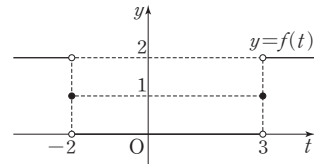


$t=-2$ 또는 $t=3$ 일 때 1개이므로 $f(t)=1$

$-2 < t < 3$ 일 때 0개이므로 $f(t)=0$

$$\therefore f(4)=2 \text{ (참)}$$

$\neg$.



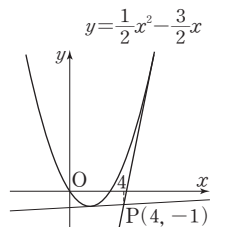
$\lim_{t \rightarrow -2^-} f(t)=2, \lim_{t \rightarrow -2^+} f(t)=0$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow -2} f(t)$ 의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

답 ⑤

다른풀이 $\neg$. $t=4$ 일 때, $P(4, -1)$ 이므로

오른쪽 그림에서 $f(4)=2$ (참)



- 11 두 곡선 $y=f(x), y=(x-1)f(x)$ 가 점 $P(2, -2)$ 에서 만나므로 $f(2)=-2$

$g(x)=(x-1)f(x)$ 라 하면

$$g'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

$$\therefore g'(2)=f(2)+f'(2)=-2+f'(2)$$

점 $P(2, -2)$ 에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(2)g'(2)=-1$$

$$f'(2)\{-2+f'(2)\}=-1, \{f'(2)\}^2-2f'(2)+1=0$$

$$\{f'(2)-1\}^2=0 \quad \therefore f'(2)=1$$

$$\therefore g'(2)=-2+1=-1$$

따라서 점 P에서의 두 곡선의 접선의 방정식은 각각

$$y-f(2)=f'(2)(x-2), y-g(2)=g'(2)(x-2)$$

$$y-(-2)=x-2, y-(-2)=-1(x-2)$$

$$\therefore y=x-4, y=-x$$

따라서 두 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(4, 0),$

$(0, 0)$ 이므로 두 점 사이의 거리는 4이다. 답 ④

- 12 직선 OA가 삼각형 BOC의 넓이를 이등분하므로 점 A는 선분 BC의 중점이다.

이때 $A(\alpha, \beta)$ 이므로

$B(2\alpha, 0), C(0, 2\beta)$

직선 BC의 기울기는

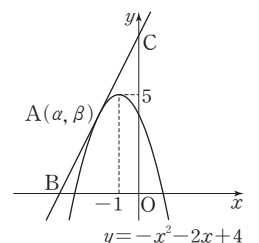
$$\frac{2\beta-0}{0-2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$f(x)=-x^2-2x+4$ 라 하면

$$f'(x)=-2x-2$$

$$f'(\alpha)=-\frac{\beta}{\alpha} \text{이므로 } -2\alpha-2=-\frac{\beta}{\alpha}, 2\alpha^2+2\alpha=\beta$$

$$\therefore 2\alpha^2+2\alpha-\beta=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$



점 A가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\beta = -\alpha^2 - 2\alpha + 4 \quad \cdots \textcircled{L}$$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$2\alpha^2 + 2\alpha - (-\alpha^2 - 2\alpha + 4) = 0$$

$$3\alpha^2 + 4\alpha - 4 = 0, (\alpha + 2)(3\alpha - 2) = 0$$

$$\therefore \alpha = -2 (\because \alpha < 0)$$

$$\alpha = -2 \text{를 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } \beta = 4$$

$$\therefore \alpha\beta = -2 \times 4 = -8$$

답 ①

- 13 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-a, a)$ 에서 미분가능하다.

롤의 정리를 만족시키려면 $f(a) = f(-a)$ 이어야 하므로

$$-a^3 - 2a^2 + 4a - 7 = a^3 - 2a^2 - 4a - 7$$

$$2a^3 - 8a = 0, 2a(a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

따라서 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x) = -3x^2 - 4x + 4 \text{이므로}$$

$$f'(c) = -3c^2 - 4c + 4 = 0, (c+2)(3c-2) = 0$$

$$\therefore c = \frac{2}{3} (\because -2 < c < 2)$$

$$\therefore ac = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

답 ④

- 14 조건 (가)에서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} \times \frac{2}{5} \right] \leq 4$$

$$\frac{2}{5} f'(x) \leq 4 \quad \therefore f'(x) \leq 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 6]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 6)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(1, 6)$ 에 적어도 하나 존재한다. 이때 조건 (나)와 ㉠에서

$$\frac{f(6) + 17}{6 - 1} = f'(c) \leq 10$$

$$f(6) + 17 \leq 50 \quad \therefore f(6) \leq 33$$

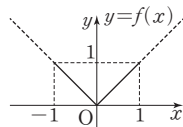
따라서 $f(6)$ 의 최댓값은 33이다.

답 ④

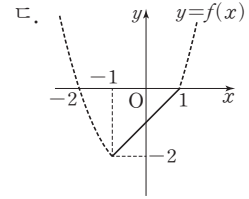
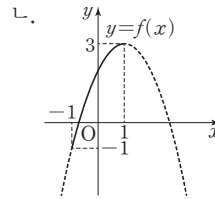
- 15 $f(1) - f(-1) = 2f'(c)$ 에서

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c) \quad \cdots \textcircled{1}$$

ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 존재하지 않는다.



ㄴ, ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.



따라서 조건을 만족시키는 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 존재하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다

답 ⑤

- 16 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 5x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 6x^2 + 2ax + 5$

곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 기울기가 4인 것이 존재하지 않으려면 방정식 $f'(x) = 4$ 가 실근을 갖지 않아야 한다.

$$f'(x) = 4 \text{에서 } 6x^2 + 2ax + 5 = 4$$

$$\therefore 6x^2 + 2ax + 1 = 0$$

이 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6 < 0, (a + \sqrt{6})(a - \sqrt{6}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

답 ③

- 17 $f(x) = x^3 + 6x^2$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 12x$

점 $(a, f(a))$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, f(t))$, 즉 $(t, t^3 + 6t^2)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 + 12t$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + 6t^2) = (3t^2 + 12t)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 + 12t)x - 2t^3 - 6t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(a, f(a))$, 즉 $(a, a^3 + 6a^2)$ 을 지나므로

$$a^3 + 6a^2 = (3t^2 + 12t)a - 2t^3 - 6t^2$$

$$2t^3 + (-3a + 6)t^2 - 12at + a^3 + 6a^2 = 0$$

$$(t - a)^2(2t + a + 6) = 0$$

$$\therefore t = a \text{ 또는 } t = \frac{-a - 6}{2}$$

$$(i) a = \frac{-a - 6}{2}, \text{ 즉 } a = -2 \text{일 때}$$

점 $(a, f(a))$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 x 좌표는

$$t = a = \frac{-a - 6}{2} = -2$$

의 1개이므로 접선의 방정식은

$$y = -12x - 8 (\because \textcircled{1})$$

접점의 x 좌표의 합은 $g(a) = -2$ 이므로 방정식

$$\{g(a) + 1\} \{g(a) + 2\} = 0 \text{을 만족시킨다.}$$

$$(ii) a \neq \frac{-a - 6}{2}, \text{ 즉 } a \neq -2 \text{일 때}$$

점 $(a, f(a))$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 x 좌표는 각각

$$t = a, t = \frac{-a - 6}{2}$$

이므로 접선의 방정식은 각각

$$y = (3a^2 + 12a)x - 2a^3 - 6a^2,$$

$$y = \left\{ 3 \left(\frac{-a-6}{2} \right)^2 + 12 \left(\frac{-a-6}{2} \right) \right\} x - 2 \left(\frac{-a-6}{2} \right)^3 - 6 \left(\frac{-a-6}{2} \right)^2$$

두 접점의 x 좌표의 합은

$$g(a) = a + \frac{-a-6}{2} = \frac{a-6}{2}$$

이때 $\{g(a)+1\} \{g(a)+2\} = 0$ 에서

$$\left(\frac{a-6}{2} + 1 \right) \left(\frac{a-6}{2} + 2 \right) = 0, (a-4)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=4$$

(i), (ii)에서 방정식 $\{g(a)+1\} \{g(a)+2\} = 0$ 의 해는

$$a=-2 \text{ 또는 } a=2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 해의 합은

$$-2+2+4=4$$

답 ④

참고 $P(t) = 2t^3 + (-3a+6)t^2 - 12at + a^3 + 6a^2$ 이라 하면 $P(a) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $P(t)$ 를 인수분해하면

a	2	$-3a+6$	$-12a$	a^3+6a^2	
		$2a$	$-a^2+6a$	$-a^3-6a^2$	
a	2	$-a+6$	$-a^2-6a$	0	
		$2a$	a^2+6a		
	2	$a+6$		0	

$$P(t) = (t-a)^2(2t+a+6)$$

18 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x^3-27} = \frac{1}{3}$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-3\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$

$$\therefore f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x^3-27} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \frac{1}{x^2+3x+9} \right\} \\ &= \frac{1}{27} f'(3) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{27} f'(3) = \frac{1}{3} \text{이므로 } f'(3) = 9 \quad \dots\dots ①$$

$g(x) = xf(x)$ 라 하면

$$g(3) = 3f(3) = 3 \times 3 = 9 \quad \therefore a = 9 \quad \dots\dots ②$$

$g'(x) = f(x) + xf'(x)$ 이므로

$$g'(3) = f(3) + 3f'(3) = 3 + 3 \times 9 = 30$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 (3, 9)에서의 접선의 방정식은

$$y - 9 = 30(x - 3) \quad \therefore y = 30x - 81$$

$$\therefore b = -81 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-81}{9} = -9 \quad \dots\dots ④$$

답 -9

채점기준	배점
① $f(3), f'(3)$ 의 값 구하기	3
② a 의 값 구하기	1
③ b 의 값 구하기	2
④ $\frac{b}{a}$ 의 값 구하기	1

19 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2k]$ 에서 연속이고 열린구간

$(-2, 2k)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2k)-f(-2)}{2k-(-2)} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(-2, 2k)$ 에 적어도 하나 존재한다. $\dots\dots ①$

$$f(x) = x^3 - x + 3 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$c = k \text{이므로 } \frac{f(2k)-f(-2)}{2k-(-2)} = f'(c) = f'(k) \text{에서}$$

$$\frac{(8k^3 - 2k + 3) - (-3)}{2k + 2} = 3k^2 - 1 \quad \dots\dots ②$$

$$\frac{2(k+1)(4k^2 - 4k + 3)}{2(k+1)} = 3k^2 - 1$$

$$4k^2 - 4k + 3 = 3k^2 - 1 \quad (\because k > 0)$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0, (k-2)^2 = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad \dots\dots ③$$

답 2

채점기준	배점
① 평균값 정리를 설명하기	2
② k 에 대한 방정식 세우기	2
③ k 의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.120 ~ 122

1 점 (0, 0)이 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$f(0) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

점 (1, 2)가 곡선 $y = xf(x)$ 위의 점이므로

$$f(1) = 2 \quad \dots\dots ㉡$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (0, 0)에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(0)x \quad \dots\dots ㉢$$

또, $y = xf(x)$ 에서 $y' = f(x) + xf'(x)$ 이므로 곡선 $y = xf(x)$

위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는

$$f(1) + f'(1) = 2 + f'(1) \quad (\because ㉡)$$

이고, 접선의 방정식은

$$y - 2 = \{2 + f'(1)\}(x - 1)$$

$$\therefore y = \{2 + f'(1)\}x - f'(1) \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣이 일치하므로

$$f'(0) = 2 + f'(1), -f'(1) = 0$$

$$\therefore f'(0) = 2, f'(1) = 0 \quad \dots\dots ㉤$$

㉠에서

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0)$$

$$\text{라 하면 } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

이때 ㉡, ㉤에서

$$f(1) = a + b + c = 2, f'(0) = c = 2, f'(1) = 3a + 2b + c = 0$$

즉, $a + b = 0, 3a + 2b = -2$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 2$$

따라서 $f'(x) = -6x^2 + 4x + 2$ 이므로

$$f'(2) = -24 + 8 + 2 = -14$$

답 ⑤

- 2 점 $(0, 2)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
 $f(0)=2$ ㉠
 점 $(1, 3)$ 이 곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점이므로
 $f(1)=3$ ㉡
 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y=f'(0)x+2$ ㉢
 또, $y=x^2f(x)$ 에서 $y'=2xf(x)+x^2f'(x)$ 이므로 곡선
 $y=x^2f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는
 $2f(1)+f'(1)=6+f'(1)$ ($\because$ ㉡)
 이고, 접선의 방정식은
 $y-3=\{6+f'(1)\}(x-1)$
 $\therefore y=\{6+f'(1)\}x-f'(1)-3$ ㉣
 ㉢, ㉣이 일치하므로
 $f'(0)=6+f'(1), -f'(1)-3=2$
 $\therefore f'(0)=1, f'(1)=-5$ ㉤
 ㉠에서
 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)
 라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
 이때 ㉡, ㉤에서
 $f(1)=a+b+c+2=3, f'(0)=c=1, f'(1)=3a+2b+c=-5$
 즉, $a+b=0, 3a+2b=-6$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $a=-6, b=6$
 따라서 $f'(x)=-18x^2+12x+1$ 이므로
 $f'(-1)=-18-12+1=-29$ 답 ④

- 3 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 이므로
 $f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q 는 상수)
 라 하면 $f'(x)=3x^2+2px+q$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-1}{x-a}=3$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow a$ 일 때
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-1\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x)=1$
 $\therefore f(a)=\lim_{x \rightarrow a} f(x)=1$ ($\because f(x)$ 는 연속함수)
 $\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-1}{x-a}=\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=3$
 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$, 즉 $(a, 1)$ 에서의 접선
 의 방정식은
 $y-1=3(x-a)$
 $\therefore y=3x-3a+1$
 이 직선의 y 절편이 4이므로
 $-3a+1=4, -3a=3 \quad \therefore a=-1$
 따라서 $f(-1)=1, f'(-1)=3$ 이므로
 $f(-1)=-1+p-q=1 \quad \therefore p-q=2$ ㉠
 $f'(-1)=3-2p+q=3 \quad \therefore -2p+q=0$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-2, q=-4$
 따라서 $f(x)=x^3-2x^2-4x$ 이므로
 $f(1)=1-2-4=-5$ 답 ⑤

- 4 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-1$ 이므로
 $f(x)=x^3+px^2+qx-1$ (p, q 는 상수)
 이라 하면 $f'(x)=3x^2+2px+q$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)+7}{x-a}=-1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow a$ 일 때
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+7\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x)=-7$
 $\therefore f(a)=\lim_{x \rightarrow a} f(x)=-7$ ($\because f(x)$ 는 연속함수)
 $\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)+7}{x-a}=\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=-1$
 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$, 즉 $(a, -7)$ 에서의 접
 선의 방정식은
 $y-(-7)=-(x-a) \quad \therefore y=-x+a-7$
 이 직선의 x 절편이 -5 이므로 ⌊ x 절편은 $0=-x+a-7$ 에서 $x=a-7$ ⌋
 $a-7=-5 \quad \therefore a=2$
 따라서 $f(2)=-7, f'(2)=-1$ 이므로
 $f(2)=8+4p+2q-1=-7, 4p+2q=-14$
 $\therefore 2p+q=-7$ ㉠
 $f'(2)=12+4p+q=-1$
 $\therefore 4p+q=-13$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-3, q=-1$
 따라서 $f(x)=x^3-3x^2-x-1$ 이므로
 $f(-1)=-1-3+1-1=-4$ 답 ①

- 5 $f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$
 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y=2tx-1$ 사이의 거리가 최소
 일 때는 점 P에서의 접선이 직선 $y=2tx-1$ 과 평행할 때이다.
 P(a, a^2)이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 $2a$ 이므로
 $f'(a)=2a=2t \quad \therefore a=t$
 따라서 P(t, t^2)이므로 직선 OP의 방정식은
 $y=\frac{t^2}{t}x \quad \therefore y=tx$
 점 Q의 x 좌표는 $tx=2tx-1$ 에서
 $tx=1 \quad \therefore x=\frac{1}{t}$
 점 Q의 y 좌표는 $y=t \times \frac{1}{t}=1$
 $\therefore Q\left(\frac{1}{t}, 1\right)$
 따라서
 $PQ=\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}$
 $=\sqrt{\frac{1}{t^2}(1-t^2)^2+(1-t^2)^2}$
 $=\sqrt{(1-t^2)^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}$
 $=(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$ ($\because 0 < t < 1$ 에서 $1-t^2 > 0$)
 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\overline{PQ}}{1-t} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1+t)(1-t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} (1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1} \\
&= (1+1) \times \sqrt{\frac{1}{1}+1} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

답 ③

6 $f(x)=2x^2$ 이라 하면 $f'(x)=4x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y=4tx-8$ 사이의 거리가 최소 일 때는 점 P에서의 접선이 직선 $y=4tx-8$ 과 평행할 때이다.

$P(a, 2a^2)$ 이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 $4t$ 이므로 $f'(a)=4a=4t \quad \therefore a=t$

따라서 $P(t, 2t^2)$ 이므로 직선 OP의 방정식은

$$y = \frac{2t^2}{t}x \quad \therefore y = 2tx$$

점 Q의 x 좌표는 $2tx=4tx-8$ 에서

$$2tx=8 \quad \therefore x = \frac{4}{t}$$

점 Q의 y 좌표는 $y=2t \times \frac{4}{t}=8 \quad \therefore Q\left(\frac{4}{t}, 8\right)$

따라서

$$\begin{aligned}
\overline{PQ} &= \sqrt{\left(\frac{4}{t}-t\right)^2 + (8-2t^2)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{t^2}(4-t^2)^2 + 4(4-t^2)^2} \\
&= \sqrt{(4-t^2)^2 \left(\frac{1}{t^2} + 4\right)} \\
&= (4-t^2) \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4} \quad (\because 0 < t < 2 \text{에서 } 4-t^2 > 0)
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{\overline{PQ}}{2-t} &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{(4-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}}{2-t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{(2+t)(2-t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}}{2-t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} (2+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+4} \\
&= (2+2) \times \sqrt{\frac{1}{4}+4} = 2\sqrt{17}
\end{aligned}$$

답 ②

3 도함수의 활용 (2)

교과서 예제

p.125

01 (1) $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1) = x_1^2 - x_2^2 \\
&= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0
\end{aligned}$$

이므로 $f(x_1) < f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^2+1$ 은 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

(2) $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= (-x_1^3 + 2) - (-x_2^3 + 2) = x_2^3 - x_1^3 \\
&= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)
\end{aligned}$$

이때 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > 0 \\
\therefore f(x_1) &> f(x_2)
\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)=-x^3+2$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.

(3) $2 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 - 4x_1) - (x_2^2 - 4x_2) \\
&= (x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2) \\
&= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 4(x_1 - x_2) \\
&= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)
\end{aligned}$$

이때 $x_1 - x_2 < 0$ 이고, $x_1 + x_2 - 4 > 2 + 2 - 4 = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) < 0 \\
\therefore f(x_1) &< f(x_2)
\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)=x^2-4x$ 는 구간 $[2, \infty)$ 에서 증가한다.

답 (1) 증가 (2) 감소 (3) 증가

참고 (3) $x_1 \geq 2, x_2 > 2$ 이므로

$$x_1 + x_2 > 4 \quad \therefore x_1 + x_2 - 4 > 0$$

02 (1) $f(x)=x^3-2x^2+x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \frac{1}{3}]$, $[1, \infty)$ 에서 증가하

고, 구간 $[\frac{1}{3}, 1]$ 에서 감소한다.

(2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	0	/	1	\	0	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, 1]$, $[2, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$ 에서 감소한다. **답** 풀이 참조

03 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(-1)=0, f'(3)=0$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\		/		\

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 3]$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$ 에서 감소한다. **답** 풀이 참조

04 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 2, $x=0$ 에서 극솟값 -2를 갖는다. **답** 극댓값: 2, 극솟값: -2

05 **답** (1) b, d, h (2) a, c, e

06 (1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ 에서

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	6	\	-26	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 6, $x=3$ 에서 극솟값 -26을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$ 에서

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	2	/	3	\	2	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 3, $x=-1$ 또는 $x=1$ 에서 극솟값 2를 갖는다.

답 (1) 극댓값: 6, 극솟값: -26 (2) 극댓값: 3, 극솟값: 2

07 (1) $f(x)=-x^3+3x^2-1$ 에서

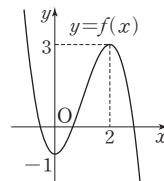
$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-1	/	3	\

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{4}$ 에서

$$f'(x)=x^3+x^2-2x$$

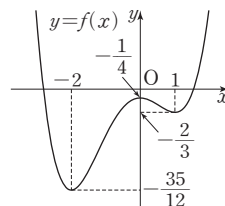
$$=x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	$-\frac{35}{12}$	/	$-\frac{1}{4}$	\	$-\frac{2}{3}$	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

08 (1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ 에서

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	1	/	12	\	-15

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 12, $x=2$ 에서 최솟값 -15를 갖는다.

(2) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$ 에서

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	16	\	-1	/	0	/	7

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 16, $x=0$ 에서 최솟값 -1을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 12, 최솟값: -15

(2) 최댓값: 16, 최솟값: -1

09 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 각 꼭

짓점을 A, B, C, D라 하고

$D(t, -t^2+9)$ ($0 < t < 3$)

라 하면

$\overline{AD}=2t, \overline{CD}=-t^2+9$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$S(t)=2t(-t^2+9)=-2t^3+18t$ 이므로

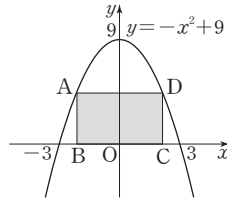
$S'(t)=-6t^2+18=-6(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$

$S'(t)=0$ 에서 $t=\sqrt{3}$ ($\because 0 < t < 3$)

$0 < t < 3$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\sqrt{3}$	...	3
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$12\sqrt{3}$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$ 는 $t=\sqrt{3}$ 에서 최댓값 $12\sqrt{3}$ 을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $12\sqrt{3}$ 이다. 답 12 $\sqrt{3}$



기출 Best | 1회

p.126~129

01 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 에서

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $[1, \infty)$ 에서 증가하므로 $f(x)$ 가 증가하는 구간에 속하는 x 의 값이 아닌 것은 ④ 0이다. 답 ④

02 $f(x)=2x^3+ax^2+6x+3$ 에서 $f'(x)=6x^2+2ax+6$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-36 \leq 0, (a+6)(a-6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 6$$

따라서 $m=-6, n=6$ 이므로

$$n-m=6-(-6)=12$$

답 ②

03 $f(x)=-x^3+2x^2+ax-3$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+4x+a=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+a+\frac{4}{3}$$

함수 $f(x)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 증가하려면

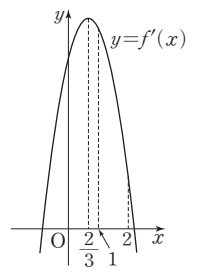
$1 < x < 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오

른쪽 그림에서

$$f'(2)=-12+8+a \geq 0$$

$$\therefore a \geq 4$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 4이다.



답 ③

04 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+8$ 에서

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값 3, $x=0$ 에서 극댓값 8, $x=2$ 에서 극솟값 -24를 가지므로 모든 극값의 합은

$$3+8+(-24)=-13$$

답 ②

05 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 6을 가지므로

$$f(1)=6, f'(1)=0$$

$$f(1)=6 \text{에서 } 1+a+b+2=6 \quad \therefore a+b=3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 3+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6, b=9$

$$\therefore b-a=9-(-6)=15$$

답 ⑤

06 $f(x)=x^3-3x^2+k$ 에서

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-4$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 k , $x=2$ 에서 극솟값 $k-4$ 를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로 $|k|=|k-4|$

$$k \neq k-4 \text{이므로 } k=-(k-4)$$

$$2k=4 \quad \therefore k=2$$

답 ②

07 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로

$a < 0$

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1 \text{에서 } f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=a$, $x=\beta$ 에서 극값을 갖는다고 하면 a , β 는 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근이고, a , β 는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=-\frac{2b}{3a}>0, a\beta=\frac{c}{3a}>0$$

이때 $a<0$ 이므로 $b>0$, $c<0$

$$\therefore \frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{-c}{c}=-1+1-1=-1$$

답 ②

08 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$ 이므로

$$12-4a+b=0, 12+4a+b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-12$

$$\therefore f(x)=x^3-12x+c$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$c+16$	↘	$c-16$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 $c+16$, $x=2$ 에서 극솟값 $c-16$ 을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 0이므로

$$c-16=0 \quad \therefore c=16$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$c+16=16+16=32$$

답 ④

09 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1 , 2 , 4 이므로 $f'(x)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

① 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이다.

② 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소가 아니다.

③ 열린구간 $(-2, -1)$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

④ 열린구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

⑤ 열린구간 $(4, 5)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

10 $f(x)=2x^3-6x^2$ 에서

$$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-8	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $g(x)=|f(x)+a|$ 가 서로 다른 세 점에서 미분가능하지 않으려면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$-8<-a<0 \quad \therefore 0<a<8$$

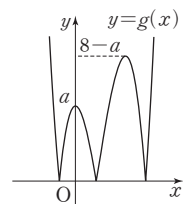
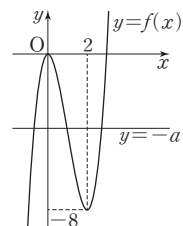
따라서 정수 a 는 1, 2, 3, ..., 7이므로 구하는 합은

$$1+2+3+\cdots+7=28$$

답 ③

참고 $0<a<8$ 일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 그

래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 세 점에서 미분가능하지 않다.



11 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2ax$ 에서 $f'(x)=x^2-2ax+2a$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\times 2a=a^2-2a>0, a(a-2)>0$$

$$\therefore a<0 \text{ 또는 } a>2$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 3이다.

답 ②

12 $f(x)=x^3+kx^2+3x+2$ 에서 $f'(x)=3x^2+2kx+3$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3\times 3=k^2-9\leq 0, (k+3)(k-3)\leq 0$$

$$\therefore -3\leq k\leq 3$$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, \dots, 3$ 의 7개이다.

답 ③

13 $f(x)=x^3+kx$ 에서 $f'(x)=3x^2+k$

(i) $k\geq 0$ 일 때,

$f'(x)=3x^2+k\geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

(ii) $k<0$ 일 때,

$$f'(x)=0 \text{에서 } 3x^2+k=0$$

$$x^2=-\frac{k}{3} \quad \therefore x=\pm\sqrt{-\frac{k}{3}}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{-\frac{k}{3}}$	...	$\sqrt{-\frac{k}{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 가 $0 < x < 1$ 에서 극솟값을 가지려면

$$0 < \sqrt{-\frac{k}{3}} < 1 \quad (\because \sqrt{-\frac{k}{3}} > 0)$$

$$0 < -\frac{k}{3} < 1 \quad \therefore -3 < k < 0$$

(i), (ii)에서 $-3 < k < 0$

따라서 정수 k 는 $-2, -1$ 이므로 구하는 합은

$$-2 + (-1) = -3$$

답 ②

14 $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2ax^2$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4ax = -4x(x^2 - 3x - a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식

$f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 이 0 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-a) = 9 + 4a > 0$$

$$4a > -9 \quad \therefore a > -\frac{9}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

또, 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 은 $x=0$ 을 해로 갖지 않으므로

$$-a \neq 0 \quad \therefore a \neq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-\frac{9}{4} < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

답 ⑤

15 $f(x) = 2x^4 + 2ax^3 + (a+5)x^2$ 에서

$$f'(x) = 8x^3 + 6ax^2 + 2(a+5)x = 2x(4x^2 + 3ax + a+5)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2 + 3ax + a+5 = 0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (3a)^2 - 4 \times 4 \times (a+5) = 9a^2 - 16a - 80 < 0$$

$$(9a+20)(a-4) < 0 \quad \therefore -\frac{20}{9} < a < 4$$

(ii) 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2 + 3ax + a+5 = 0$ 이 $x=0$ 과 0 이 아닌 다른 실근을 두 근으로 갖거나 0 이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

(ㄱ) $x=0$ 을 근으로 가질 때,

$$a+5=0 \quad \therefore a=-5 \quad \dots\dots ㉠$$

(ㄴ) 0 이 아닌 실수를 중근으로 가질 때,

$$D = 9a^2 - 16a - 80 = 0, (9a+20)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{20}{9} \text{ 또는 } a=4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -5 \text{ 또는 } a = -\frac{20}{9} \text{ 또는 } a=4$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a = -5 \text{ 또는 } -\frac{20}{9} \leq a \leq 4$$

따라서 $M=4, m=-5$ 이므로

$$M+m=4+(-5)=-1$$

답 ①

참고 이차방정식 $4x^2 + 3ax + a+5=0$ 이 $x=0$ 을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 삼중근을 가질 수 없다.

16 $f(x) = -x^3 + 12x$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=2 \quad (\because 0 \leq x \leq 4)$$

닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 16, $x=4$ 에서 최솟값 -16을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$16 + (-16) = 0$$

답 ③

17 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + k$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0
$f(x)$	$k-8$	$\nearrow$	$k+1$	$\searrow$	k	$\nearrow$	$k+1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 에서 최댓값 $k+1$, $x=-2$ 에서 최솟값 $k-8$ 을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 -2이므로

$$k+1 = -2 \quad \therefore k = -3$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$k-8 = -3-8 = -11$$

답 ②

18 $P(t, t^2)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 = t^2 + (t^2 - 5)^2 = t^4 - 9t^2 + 25$$

$$f(t) = t^4 - 9t^2 + 25 \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 4t^3 - 18t = 2t(2t^2 - 9)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } 2t^2 - 9 = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{19}{4}$	$\nearrow$	25	$\searrow$	$\frac{19}{4}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 또는 $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{19}{4}$ 를 가지므로 $\overline{AP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{19}{4}$ 이다. 답 ④

19 $D(t, -t^2+6)$ ($0 < t < \sqrt{6}$)이라 하면

$$\overline{AD} = 2t, \overline{CD} = -t^2+6 \quad \begin{matrix} \text{---} x^2+6=0 \text{에서} \\ x=\pm\sqrt{6} \end{matrix}$$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = 2t(-t^2+6) = -2t^3+12t$$

$$S'(t) = -6t^2+12 = -6(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } t=\sqrt{2} \quad (\because 0 < t < \sqrt{6})$$

$0 < t < \sqrt{6}$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\sqrt{2}$	...	$\sqrt{6}$
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	$8\sqrt{2}$	↘	

따라서 함수 $S(t)$ 는 $t=\sqrt{2}$ 에서 최대이므로 점 D의 y 좌표는 $-t^2+6 = -(\sqrt{2})^2+6=4$ 답 ⑤

20 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름

의 길이를 x ($0 < x < 3$), 높이를 h 라 하면

$$x : (6-h) = 3 : 6 = 1 : 2, 2x = 6-h$$

$$\therefore h = 6-2x$$

원기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \pi x^2 h = \pi x^2 (6-2x) = 2\pi (3x^2 - x^3)$$

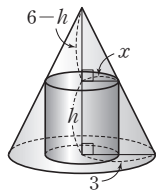
$$\therefore V'(x) = 2\pi (6x - 3x^2) = 6\pi x (2-x)$$

$$V'(x)=0 \text{에서 } x=2 \quad (\because 0 < x < 3)$$

$0 < x < 3$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	8π	↘	

따라서 함수 $V(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 8π 를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 8π 이다. 답 ①



따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ 에서 증가하므로 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간이 아닌 것은 ② $[0, 1]$ 이다. 답 ②

02 $f(x) = x^3 + 3ax^2 - 3(a-6)x + 4$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax - 3(a-6)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (3a)^2 - 3 \times \{-3(a-6)\} = 9a^2 + 9(a-6) \leq 0,$$

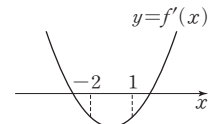
$$a^2 + a - 6 \leq 0, (a+3)(a-2) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 2$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 의 6개이다. 답 ③

03 $f(x) = x^3 + ax^2 - 10x + 5$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 10$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 1)$ 에서 감소하려면 $-2 < x < 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$f'(-2) \leq 0, f'(1) \leq 0$$

$$f'(-2) = 12 - 4a - 10 \leq 0 \text{에서}$$

$$-4a \leq -2 \quad \therefore a \geq \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(1) = 3 + 2a - 10 \leq 0 \text{에서}$$

$$2a \leq 7 \quad \therefore a \leq \frac{7}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{7}{2}$$

따라서 $M = \frac{7}{2}, m = \frac{1}{2}$ 이므로

$$M + m = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4 \quad \text{답 ⑤}$$

04 $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 1$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$		+	+	0	-
$f(x)$		↗	↗	28	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 28을 가지므로

$$a=3, b=28$$

$$\therefore a+b=3+28=31 \quad \text{답 ①}$$

05 $f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 최솟값 -3 을 가지므로

$$f(1) = -3, f'(1) = 0$$

01 $f(x) = x^3 - 3x + 4$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$		+	+	0	+
$f(x)$		↗	↗	6	↘

$$f(1) = -3 \text{에서}$$

$$-2 + a + b + 3 = -3 \quad \therefore a + b = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$-6 + 2a + b = 0 \quad \therefore 2a + b = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 10, b = -14$$

$$\therefore a - b = 10 - (-14) = 24$$

답 ⑤

06 $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}kx^2 + 6k^2x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 9kx + 6k^2 = 3(x-k)(x-2k)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = k \text{ 또는 } x = 2k$$

$k > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}k^3$	$\searrow$	$2k^3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = k$ 에서 극댓값 $\frac{5}{2}k^3$, $x = 2k$ 에서 극솟값 $2k^3$ 을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 4이므로

$$\frac{5}{2}k^3 - 2k^3 = 4, \quad \frac{1}{2}k^3 = 4, \quad k^3 = 8$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

답 ④

07 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서 $f(0) > 0$ 이므로 $c > 0$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x = a$, $x = \beta$ 에서 극값을 갖는다고 하면 a, β 는 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 실근이고, a, β 는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = -\frac{2a}{3} > 0, \quad a\beta = \frac{b}{3} > 0$$

$$\therefore a < 0, b > 0$$

$$\therefore \frac{|a|}{a} + \frac{2|b|}{b} + \frac{3|c|}{c} = \frac{-a}{a} + \frac{2b}{b} + \frac{3c}{c} = -1 + 2 + 3 = 4$$

답 ⑤

08 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(0) = 0, f'(4) = 0$ 이므로

$$b = 0, 48 + 8a + b = 0$$

$$b = 0 \text{을 } 48 + 8a + b = 0 \text{에 대입하면}$$

$$48 + 8a = 0 \quad \therefore a = -6$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + c$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$c - 32$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값 c , $x = 4$ 에서 극솟값 $c - 32$ 를 갖는다. 이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 5이므로 $c = 5$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$c - 32 = 5 - 32 = -27$$

답 ①

09 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 a, c, e , g 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = a \text{ 또는 } x = c \text{ 또는 } x = e \text{ 또는 } x = g$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$	g	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

① 함수 $f(x)$ 는 $x = b$ 에서 극대가 아니다.

② 함수 $f(x)$ 는 $x = g$ 에서 극소가 아니다.

③ 열린구간 (b, c) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

④ 열린구간 (d, e) 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

⑤ 열린구간 (e, g) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

10 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $g(x) = |f(x) + a|$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않으려면 직선 $y = -a$ 가 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 한 점에서만 만나거나 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 점을 지나야 하므로

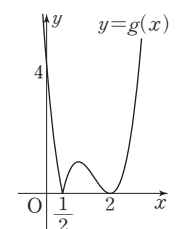
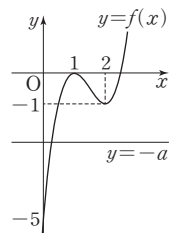
$$-a \leq -1 \text{ 또는 } -a \geq 0$$

$$a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 1 \quad \therefore a \geq 1 \quad (\because a > 0)$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 1이다.

답 ①

참고 $a = 1$ 일 때 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 한 점에서만 미분가능하지 않다.



11 $f(x)$ 가 삼차함수이므로 $a \neq 0$

$f(x) = ax^3 + 6x^2 + ax + 3$ 에서 $f'(x) = 3ax^2 + 12x + a$
삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 6^2 - 3a \times a = 36 - 3a^2 > 0, a^2 - 12 < 0$
 $(a + 2\sqrt{3})(a - 2\sqrt{3}) < 0 \quad \therefore -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$
이때 $a \neq 0$ 이므로 $-2\sqrt{3} < a < 0$ 또는 $0 < a < 2\sqrt{3}$
따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ 의 6개이다. 답 ③

12 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x + a - 1$
삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3(a-1) \leq 0, a^2 - 5a + 4 \leq 0$
 $(a-1)(a-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 4$ 답 ⑤

13 $f(x) = x^3 - ax$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - a$

(i) $a \leq 0$ 일 때, $f'(x) = 3x^2 - a \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
(ii) $a > 0$ 일 때, $f'(x) = 0$ 에서 $3x^2 - a = 0$
 $x^2 = \frac{a}{3} \quad \therefore x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	...	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 0$ 에서 극댓값, $x > 0$ 에서 극솟값을 가지려면

$$-2 < -\sqrt{\frac{a}{3}} < 0, \sqrt{\frac{a}{3}} > 0$$

$$-2 < -\sqrt{\frac{a}{3}} < 0 \text{에서 } 0 < \sqrt{\frac{a}{3}} < 2$$

$$0 < \frac{a}{3} < 4 \quad \therefore 0 < a < 12 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\sqrt{\frac{a}{3}} > 0 \text{에서 } \frac{a}{3} > 0 \quad \therefore a > 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0 < a < 12$

(i), (ii)에서 $0 < a < 12$

따라서 정수 a 의 최댓값은 11이다. 답 ③

14 $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 3ax^2 - 4$ 에서

$f'(x) = 12x^3 - 36x^2 + 6ax = 6x(2x^2 - 6x + a)$
사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2 - 6x + a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $2x^2 - 6x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 2a = 9 - 2a > 0, -2a > -9$$

$$\therefore a < \frac{9}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또, 이차방정식 $2x^2 - 6x + a = 0$ 이 $x = 0$ 을 해로 갖지 않으므로 $a \neq 0 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{9}{2}$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ① 4이다. 답 ①

15 $f(x) = -x^4 + 2ax^3 - 8x^2 + 3$ 에서

$f'(x) = -4x^3 + 6ax^2 - 16x = -2x(2x^2 - 3ax + 8)$
사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2 - 3ax + 8 = 0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3a)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 9a^2 - 64 < 0$$

$$(3a+8)(3a-8) < 0 \quad \therefore -\frac{8}{3} < a < \frac{8}{3}$$

(ii) 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2 - 3ax + 8 = 0$ 이 $x = 0$ 을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

따라서 $D = 9a^2 - 64 = 0$ 에서

$$a^2 = \frac{64}{9} \quad \therefore a = \pm \frac{8}{3}$$

(iii) 이차방정식 $2x^2 - 3ax + 8 = 0$ 이 $x = 0$ 을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 은 삼중근을 가질 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{8}{3}$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다. 답 ⑤

16 $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 10$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...	4
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	-10	$\nearrow$	17	$\searrow$	-10

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 최댓값 17, $x = 0$ 또는 $x = 4$ 에서 최솟값 -10을 가지므로 $M = 17, m = -10$

$$\therefore M + m = 17 + (-10) = 7$$

답 ②

17 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + b$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 6ax$

$$f'(3) = -9 \text{에서 } 27 + 18a = -9$$

$$18a = -36 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	4
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$b-16$	$\searrow$	$b-32$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최솟값 $b-32$ 를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -12 이므로

$$b-32 = -12 \quad \therefore b=20$$

$$\therefore a+b = -2+20=18$$

답 ①

18 $P(t, t^2-1)$ 이라 하면

$$\overline{PQ}^2 = (t-3)^2 + \{t^2-1-(-1)\}^2 = t^4 + t^2 - 6t + 9$$

$$f(t) = t^4 + t^2 - 6t + 9 \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 4t^3 + 2t - 6 = 2(t-1)(2t^2 + 2t + 3)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=1 \left(\because 2t^2 + 2t + 3 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > 0 \right)$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	5	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 최솟값 5를 가지므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

$\hookrightarrow \overline{PQ}^2$ 의 최솟값

답 ⑤

19 오른쪽 그림과 같이

$$A(t, t(2-t)) (0 < t < 1) \text{라 하면}$$

$$B(2-t, t(2-t))$$

$$C(2, 0) \text{이라 하고 사다리꼴 AOCB}$$

의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times [\{(2-t)-t\} + 2] \times t(2-t)$$

$$= t^3 - 4t^2 + 4t$$

$$S'(t) = 3t^2 - 8t + 4 = (3t-2)(t-2)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = \frac{2}{3} \left(\because 0 < t < 1 \right)$$

$0 < t < 1$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$ 는 $t = \frac{2}{3}$ 에서 최대이므로 구하는 사다리꼴의 넓이는

$$t(2-t) = \frac{2}{3} \times \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

답 ⑤

20 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 $2x (0 < x < 3)$ 라 하면

$$r^2 = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$$

원기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \pi r^2 \times 2x$$

$$= \pi(9 - x^2) \times 2x$$

$$= 2\pi(-x^3 + 9x)$$

$$V'(x) = 2\pi(-3x^2 + 9)$$

$$= -6\pi(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$V'(x) = 0 \text{에서}$$

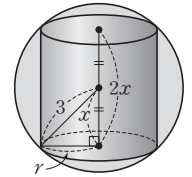
$$x = \sqrt{3} \left(\because 0 < x < 3 \right)$$

$0 < x < 3$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{3}$	...	3
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	$12\sqrt{3}\pi$	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$ 는 $x = \sqrt{3}$ 에서 최댓값 $12\sqrt{3}\pi$ 를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $12\sqrt{3}\pi$ 이다.

답 ③



변형유형 집중공략

p.134 ~ 135

1-1 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -3, x = 1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-3) = 0, f'(1) = 0$$

$$27 - 6a + b = 0, 3 + 2a + b = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 3, b = -9$ 이므로

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 6$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	33	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 33, $x = 1$ 에서 극솟값 1을 가지므로 구하는 합은

$$33 + 1 = 34$$

답 34

1-2 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1, x = 3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1) = 0, f'(3) = 0$$

$$3 + 2a + b = 0, 27 + 6a + b = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 9$ 이므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$c+4$	↘	c	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $c+4$, $x=3$ 에서 극솟값 c 를 갖는다.

이때 극댓값이 극솟값의 2배이므로

$$c+4=2c \quad \therefore c=4$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$c+4=4+4=8$$

답 ④

2-1 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm ($0 < x < \frac{15}{2}$)라 하고

상자의 부피를 $V(x)$ cm³이라 하면

$$V(x) = x(24-2x)(15-2x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360 = 12(x-3)(x-10)$$

$$V'(x)=0 \text{에서 } x=3 \left(\because 0 < x < \frac{15}{2} \right)$$

$0 < x < \frac{15}{2}$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...	$\frac{15}{2}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	486	↘	

따라서 함수 $V(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 486을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 486 cm³이다.

$$\therefore M=486$$

답 486

2-2 오른쪽 그림에서 상자의 밑

면은 한 변의 길이가

$$(12-2x) \text{ cm } (0 < x < 6)$$

인 정삼각형이고, 상자의 높

$$\text{이는 } x \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

이다.

상자의 부피를 $V(x)$ cm³이라 하면

$$V(x) = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \times (12-2x)^2 \right\} \times \frac{x}{\sqrt{3}} = x^3 - 12x^2 + 36x$$

$$V'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x-2)(x-6)$$

$$V'(x)=0 \text{에서 } x=2 \left(\because 0 < x < 6 \right)$$

$0 < x < 6$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	32	↘	

따라서 함수 $V(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 32를 가지므로

$$a=2, b=32$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{32}{2} = 16$$

답 16

서술형 What ... How

p.136~139

1 모든 실수 t 에 대하여 구간 $[t, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $f(t)$ 가 되려면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

..... ①

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 - 4(a-1)x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax - 4(a-1)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3a)^2 - 3 \times \{-4(a-1)\} = 9a^2 + 12(a-1) \leq 0$$

$$3a^2 + 4a - 4 \leq 0, (a+2)(3a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq \frac{2}{3}$$

..... ②

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

..... ③

답 3

2 모든 실수 t 에 대하여 구간 $(-\infty, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $f(t)$ 가 되려면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

..... ①

$$f(x) = -2x^3 + (a+3)x^2 - (a+3)x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 2(a+3)x - (a+3)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (-6) \times \{-(a+3)\} = (a+3)^2 - 6(a+3) \leq 0$$

$$a^2 - 9 \leq 0, (a+3)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 3$$

..... ②

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, \dots, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-3 + (-2) + (-1) + \dots + 3 = 0$$

..... ③

답 0

채점기준	배점
① 최솟값이 $f(t)$ 가 될 조건 알기	2
② a 의 값의 범위 구하기	2
③ 정수 a 의 값의 합 구하기	1

3 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

..... ①

$$\text{조건 (4)에서 } f(3) = -12, f'(3) = 0$$

$$\text{조건 (7)에서 } f'(2+x) = f'(2-x) \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f'(3) = f'(1) \quad \therefore f'(1) = 0$$

$$f'(3) = 0, f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$27 + 6a + b = 0, 3 + 2a + b = 0$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } a = -6, b = 9$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c$$

$$f(3) = -12 \text{에서}$$

$$27-54+27+c=-12 \quad \therefore c=-12$$

$$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x-12$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3) \quad \dots\dots ②$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	-12	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 -8을 갖는다. $\dots\dots ③$

답 -8

4 조건 ㉠에서 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ①$$

조건 ㉡에서 $f'(2-x)+f'(2+x)=0$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f'(2)+f'(2)=0, 2f'(2)=0 \quad \therefore f'(2)=0$$

또, $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)+f'(3)=0 \quad \therefore f'(3)=-f'(1)=0 \quad (\because \text{조건 ㉡})$$

즉, $f'(1)=f'(2)=f'(3)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= 4x^3-24x^2+44x-24 \end{aligned} \quad \dots\dots ②$$

이것이 ㉡과 일치하므로

$$3a=-24, 2b=44, c=-24$$

$$\therefore a=-8, b=22, c=-24$$

$$\therefore f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x \quad \dots\dots ③$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 -8을 가지므로

$$p=2, q=-8$$

$$\therefore p+q=2+(-8)=-6 \quad \dots\dots ④$$

답 -6

채점기준	배점
① $f(x), f'(x)$ 를 미지수를 이용하기 나타내기	1
② $f'(x)$ 구하기	2
③ $f(x)$ 구하기	1
④ $p+q$ 의 값 구하기	2

5 $f(x)=x^3+3(a+1)x^2+4(a+2)x$ 에서

$$f'(x)=3x^2+6(a+1)x+4(a+2) \quad \dots\dots ①$$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x \leq 0$ 에서 극값을 갖지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{3(a+1)\}^2-3 \times 4(a+2)=0, 3a^2+2a-5 \leq 0$$

$$(3a+5)(a-1) \leq 0 \quad \therefore -\frac{5}{3} \leq a \leq 1 \quad \dots\dots ②$$

(ii) 삼차함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서만 극값을 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4}=3a^2+2a-5=(3a+5)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{5}{3} \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots ③$$

또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합})=-2(a+1) > 0$$

$$a+1 < 0 \quad \therefore a < -1 \quad \dots\dots ④$$

$$(\text{두 근의 곱})=\frac{4(a+2)}{3} > 0$$

$$a+2 > 0 \quad \therefore a > -2 \quad \dots\dots ⑤$$

③, ④, ⑤의 공통부분을 구하면

$$-2 < a < -\frac{5}{3} \quad \dots\dots ③$$

(i), (ii)에서 $-2 < a \leq 1$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 1이므로 정수 a 의 최솟값은 -1이다.

$\dots\dots ④$

답 -1

6 $f(x)=x^3+ax^2-ax$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax-a \quad \dots\dots ①$

삼차함수 $f(x)$ 가 $x \leq -1$ 에서 극값을 갖지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3 \times (-a) > 0, a^2+3a \leq 0, a(a+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 0 \quad \dots\dots ②$$

(ii) 삼차함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 에서만 극값을 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $x > -1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2+3a=a(a+3) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 0 \quad \dots\dots ③$$

오른쪽 그림에서 $f'(-1) > 0$ 이어야 하므로

$$f'(-1)=3-3a > 0, -3a > -3$$

$$\therefore a < 1 \quad \dots\dots ④$$

이차함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축은

$$\text{직선 } x=-\frac{a}{3} \text{ 이므로}$$

$$-\frac{a}{3} > -1 \quad \therefore a < 3 \quad \dots\dots ⑤$$

③, ④, ⑤의 공통부분을 구하면

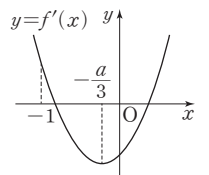
$$a < -3 \text{ 또는 } 0 < a < 1 \quad \dots\dots ③$$

(i), (ii)에서 $a < 1$

따라서 정수 a 의 최댓값은 0이다.

$\dots\dots ④$

답 0



채점기준	배점
① $f'(x)$ 구하기	1
② $f(x)$ 가 극값을 갖지 않도록 하는 a 의 값의 범위 구하기	2
③ $f(x)$ 가 $x > -1$ 에서만 극값을 갖도록 하는 a 의 값의 범위 구하기	3
④ 정수 a 의 최댓값 구하기	1

- 7 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$ ①
 닫힌구간 $[-2, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	3	...	6
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a-2$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	$a-27$	$\nearrow$	$a+54$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 에서 최댓값 $a+54$, $x=3$ 에서 최솟값 $a-27$ 을 갖는다. ②
 이때 최댓값과 최솟값의 합이 57이므로
 $(a+54) + (a-27) = 57, 2a = 30$
 $\therefore a = 15$ ③
답 15

- 8 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 2$ ($\because 1 \leq x \leq 4$) ①
 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$a-2$	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 $a+16$, $x=2$ 에서 최솟값 $a-4$ 를 가지므로
 $M = a+16, m = a-4$ ②
 이때 $M+m=16$ 이므로
 $(a+16) + (a-4) = 16, 2a = 4$
 $\therefore a = 2$ ③
답 2

채점기준	배점
① $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값 구하기	2
② M, m 을 a 에 대한 식으로 나타내기	2
③ a 의 값 구하기	1

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2], [0, \infty)$ 에서 증가하므로 $a \geq 0$
 즉, 실수 a 의 최솟값은 0이다. **답 ③**

- 02 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 는 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 증가해야 한다.

$$f(x) = 2x^3 + 2kx^2 + 3kx - 2$$

$$f'(x) = 6x^2 + 4kx + 3k$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 6 \times 3k = 4k^2 - 18k \leq 0, 2k(2k-9) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq \frac{9}{2}$$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다. **답 ⑤**

- 03 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에서 삼차함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서

극대, $x=\beta$ 에서 극소이므로

$$f'(a) = 0, f'(\beta) = 0$$

즉, a, β 는 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = -\frac{2}{3}a, a\beta = \frac{b}{3}$$

$$4 = -\frac{2}{3}a, 2 = \frac{b}{3} \quad (\because \text{조건 (나)})$$

$$\therefore a = -6, b = 6$$

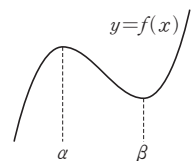
따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + c$ 이므로

$$f(2) = 8 - 24 + 12 + c = c - 4,$$

$$f(1) = 1 - 6 + 6 + c = c + 1$$

$$\therefore f(2) - f(1) = (c-4) - (c+1) = -5$$

답 ⑤



- 04 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -12 를 가지므로

$$g(2) = -12, g'(2) = 0$$

$$g(x) = (x^2 - 3x)f(x) \text{ 이고, } g(2) = -12 \text{ 이므로}$$

$$-2f(2) = -12 \quad \therefore f(2) = 6$$

$$g'(x) = (2x-3)f(x) + (x^2-3x)f'(x) \text{ 이고, } g'(2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) - 2f'(2) = 0, 6 - 2f'(2) = 0 \quad (\because f(2) = 6)$$

$$2f'(2) = 6 \quad \therefore f'(2) = 3$$

답 ⑤

- 01 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$

- 05 $f(x)=x^3+2ax^2+3bx+4c$ 에서 $f'(x)=3x^2+4ax+3b$
 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(0)=0, f'(8)=0$ 이므로
 $f'(x)=3x(x-8)=3x^2-24x$

따라서 $4a=-24, 3b=0$ 이므로 $a=-6, b=0$

$$\therefore f(x)=x^3-12x^2+4c$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	8	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$4c$	↘	$4c-256$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 $4c$ 를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4이므로

$$4c=4 \quad \therefore c=1$$

$$\therefore a+b+c=-6+0+1=-5$$

답 ②

- 06 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+a$ 에서 $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	a	↘	$a-\frac{4}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 a , $x=2$ 에서 극솟값

$a-\frac{4}{3}$ 를 갖는다. 이때 모든 극값의 곱이 $-\frac{4}{9}$ 이므로

$$a\left(a-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{9}, a^2-\frac{4}{3}a=-\frac{4}{9}$$

$$a^2-\frac{4}{3}a+\frac{4}{9}=0, \left(a-\frac{2}{3}\right)^2=0 \quad \therefore a=\frac{2}{3}$$

답 ④

- 07 ㄱ. $a < x < c$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다. (참)

ㄴ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모두 $x=a$ 에서 극솟값을 갖지만 $f(a)=g(a)$ 인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0 \text{에서 } f'(x)=g'(x)$$

$$\therefore x=a \text{ 또는 } x=b$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=b$ 에서 극댓값, $x=a$ 에서 극솟값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

- 08 $f(x)=-x^4+6x^2-4$ 에서
 $f'(x)=-4x^3+12x=-4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	5	↘	-4	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

함수 $g(x)=|f(x)+a|$ 가 서로 다른 두 점에서 미분가능하지 않으려면

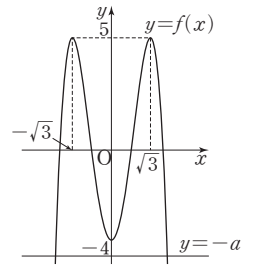
직선 $y=-a$ 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 극값을 갖는 점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나거나 $f(x)$ 가

극솟값을 갖는 점을 지나야 하므로

$$-a \leq -4 \quad \therefore a \geq 4$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 4이다.

답 ⑤



- 09 $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a^2-1)x+1$ 에서

$$f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a^2-1)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{3(a-1)\}^2-3 \times \{-3(a^2-1)\} \leq 0, 18a(a-1) \leq 0$$

$$a(a-1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a 는 0, 1의 2개이다.

답 ②

- 10 $f(x)=2x^3-5x^2+ax+1$ 에서 $f'(x)=6x^2-10x+a$

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-5)^2-6a=25-6a > 0$$

$$-6a > -25 \quad \therefore a < \frac{25}{6} \quad \cdots \cdots ㉠$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축은 직선

$$x=\frac{5}{6} \text{이므로 오른쪽 그림에서}$$

$$f'(-1) > 0, f'(3) > 0$$

$$f'(-1)=a+16 > 0$$

$$\therefore a > -16 \quad \cdots \cdots ㉡$$

$$f'(3)=a+24 > 0$$

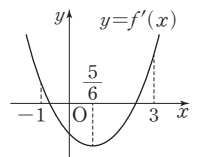
$$\therefore a > -24 \quad \cdots \cdots ㉢$$

$$㉠, ㉡, ㉢ \text{의 공통부분을 구하면 } -16 < a < \frac{25}{6}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 4이다.

답 ⑤

참고 $f'(3) > f'(-1)$ 이므로 ㉢은 구하지 않아도 된다.



- 11 $g(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2 \geq -2$ 이므로

$g(x)=t$ 로 놓으면 $t \geq -2$ 이고

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-12t+3$$

$$f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

$t \geq -2$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	...	2	...
$f'(t)$	0	-	0	+
$f(t)$	19	$\searrow$	-13	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=2$ 에서 최솟값 -13을 가지므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값은 -13이다. [답] ③

12 $g(x) = x^3 - 3x + 5$ 에서

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ (} \because x \geq 0 \text{)}$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$

따라서 $x \geq 0$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$a=1$ 일 때, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 5를 가지므로 $f(1) = 5$

$$a=2 \text{일 때, } g(0) = 5,$$

$$g(2) = 8 - 6 + 5 = 7$$

즉, 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 7이므로

$$f(2) = 7$$

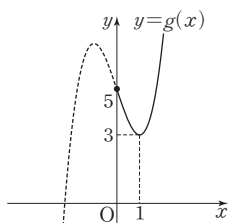
$$a=3 \text{일 때, } g(0) = 5, g(3) = 27 - 9 + 5 = 23$$

즉, 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 23이므로

$$f(3) = 23$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) = 5 + 7 + 23 = 35$$

[답] ②



13 $f(x) = 4x^3 + 3ax^2 - 6a^2x - 10$ 에서

$$f'(x) = 12x^2 + 6ax - 6a^2 = 6(x+a)(2x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -a \text{ 또는 } x = \frac{a}{2}$$

닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	...	$\frac{a}{2}$	...	a
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$5a^3 - 10$	$\searrow$	$-\frac{7}{4}a^3 - 10$	$\nearrow$	$a^3 - 10$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -a$ 에서 최댓값 $5a^3 - 10$, $x = \frac{a}{2}$ 에서

최솟값 $-\frac{7}{4}a^3 - 10$ 을 갖는다.

이때 $f(x)$ 의 최솟값이 -24이므로

$$-\frac{7}{4}a^3 - 10 = -24, -\frac{7}{4}a^3 = -14, a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2 \text{ (} \because a > 0 \text{)}$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은

$$5a^3 - 10 = 40 - 10 = 30 \quad \therefore M = 30$$

$$\therefore a + M = 2 + 30 = 32$$

[답] ②

14 $P(t, -t^2 + 2)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= t^2 + (-t^2 - 4)^2 + (t - 12)^2 + (-t^2 + 1)^2 \\ &= 2t^4 + 8t^2 - 24t + 161 \end{aligned}$$

$$f(t) = 2t^4 + 8t^2 - 24t + 161 \text{이라 하면}$$

$$f'(t) = 8t^3 + 16t - 24 = 8(t-1)(t^2 + t + 3)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t = 1 \text{ (} \because t^2 + t + 3 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \text{)}$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	147	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 최솟값 147을 가지므로

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 147이다.

[답] ①

15 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 2x - 2$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(p, f(p))$, 즉

$(p, p^2 - 2p + 1)$ ($0 < p < 1$)에서의 접선의 방정식은

$$y - (p^2 - 2p + 1) = (2p - 2)(x - p)$$

$$\therefore y = 2(p-1)x + 1 - p^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$\left(\frac{p+1}{2}, 0\right), (0, 1-p^2)$$

이때 직선 ①과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(p)$

라 하면

$$S(p) = \frac{1}{2} \times \frac{p+1}{2} \times (1-p^2)$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)(1-p^2)$$

$$S'(p) = \frac{1}{4}\{(1-p^2) + (p+1) \times (-2p)\}$$

$$= \frac{1}{4}(-3p^2 - 2p + 1)$$

$$= -\frac{1}{4}(p+1)(3p-1)$$

$$S'(p) = 0 \text{에서 } p = \frac{1}{3} \text{ (} \because 0 < p < 1 \text{)}$$

$0 < p < 1$ 에서 함수 $S(p)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

p	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$S'(p)$		+	0	-	
$S(p)$		$\nearrow$	$\frac{8}{27}$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(p)$ 는 $p=\frac{1}{3}$ 에서 최대가 된다.

이때 점 (p, q) , 즉 $(\frac{1}{3}, q)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$q=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}$$

$$\therefore p+q=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}$$

답 ③

- 16 $f(x)=x^3+2ax^2-4$ 에서 $f'(x)=3x^2+4ax=x(3x+4a)$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{4}{3}a$$

조건 ㉞에서 $-3 < x < 0$ 일 때 $f'(x) \leq 0$

조건 ㉞에서 $2 < x < 3$ 일 때 $f'(x) \geq 0$

이므로 $y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같아야 한다. 즉 $-\frac{4}{3}a \leq -3$ 이어야 하

$$\text{므로 } a \geq \frac{9}{4}$$

$$\therefore f(2)=8+8a-4$$

$$=8a+4 \geq 8 \times \frac{9}{4}+4=22$$

따라서 $f(2)$ 의 최솟값은 22이다.

답 ⑤

- 17 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+a$ 라 하면

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-32$	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하려면 극값이 0이어야 하
므로

$$a-5=0 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a-32=0$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=32$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$5+0+32=37$$

답 ③

- 18 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수, $a>0$)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

..... ①

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(0)=0, f'(2)=0 \text{이므로}$$

$$f'(x)=3ax(x-2)=3ax^2-6ax$$

..... ②

$$\text{①, ②이 일치하므로 } 2b=-6a, c=0$$

$$\therefore b=-3a, c=0$$

..... ②

$$\therefore f(x)=ax^3-3ax^2+d$$

한편, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	d	$\searrow$	$-4a+d$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 d , $x=2$ 에서 극솟값
 $-4a+d$ 를 갖는다. 이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 4이므로
 $-4a+d=4$ ③

또, $f(1)=6$ 이므로

$$a-3a+d=6 \quad \therefore -2a+d=6 \quad \text{..... ④}$$

③, ④을 연립하여 풀면 $a=1, d=8$

..... ③

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $d=8$

..... ④

답 8

채점기준	배점
① $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하고 $f'(x)$ 구하기	1
② $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 b, c 를 a 에 대한 식으로 나타내기	2
③ a, d 의 값 구하기	2
④ $f(x)$ 의 극댓값 구하기	1

- 19 $f(x)=2x^3+(a+3)x^2+bx+1$ 에서

$$f'(x)=6x^2+2(a+3)x+b$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta=0$ 이므로 근
과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=\frac{b}{6}=0 \quad \therefore b=0$$

..... ①

$$\therefore f(x)=2x^3+(a+3)x^2+1$$

$$f'(x)=6x^2+2(a+3)x=2x\{3x+(a+3)\}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{a+3}{3} < -1$$

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타
내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$a+2$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$4a+29$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $4a+29$, $x=0$ 에서 최솟
값 1을 갖는다. ②

이때 최댓값과 최솟값의 차가 36이므로

$$(4a+29)-1=36, 4a=8 \quad \therefore a=2$$

..... ③

따라서 $f(x)=2x^3+5x^2+1$ 이므로

$$f(1)=2+5+1=8$$

..... ④

답 8

채점기준	배점
① b 의 값 구하기	1
② 함수 $f(x)$ 의 최댓값, 최솟값 구하기	2
③ a 의 값 구하기	2
④ $f(1)$ 의 값 구하기	1

$$\text{참고 } a>0 \text{이므로 } a+3>3 \quad \therefore -\frac{a+3}{3} < -1$$

실전 문제 | 2회

p.144~147

- 01 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 즉
함수 $f(x)$ 가 일대일함수이려면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서

증가하거나 감소해야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 2ax \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 2ax + 2a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 3 \times 2a = a^2 - 6a \leq 0$$

$$a(a-6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 6이므로 모든 정수 a 의 값의 합은 $0+1+2+\dots+6=21$ [답] ③

02 $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ 에서 $f'(x) = -3x^2 + 12$

함수 $f(x)$ 가 증가하려면 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(x) = -3x^2 + 12 \geq 0, \quad x^2 - 4 \leq 0$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 2$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 증가한다.

따라서 열린구간 $(-a, a)$ 가 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에 포함되어야 하므로 양수 a 의 최댓값은 2이다. [답] ②

03 기울기가 -9인 직선의 방정식을 $y = -9x + k$ (k 는 상수)라 하면 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -9x + k$ 가 $x = -1$ 인 점에서 접하고 $x = 2$ 인 점에서 만나므로 삼차방정식 $f(x) = -9x + k$, 즉 $f(x) + 9x - k = 0$ 은 $x = -1$ 을 중근으로 갖고 $x = 2$ 를 한 근으로 갖는다. 이때 삼차식 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) + 9x - k = (x+1)^2(x-2)$$

$$\therefore f(x) = (x+1)^2(x-2) - 9x + k$$

$$= x^3 - 12x + k - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$k+14$	$\searrow$	$k-18$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 $k+14$, $x = 2$ 에서 극솟값 $k-18$ 을 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$(k+14) - (k-18) = 32$$

[답] ②

04 사차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 도함수 $f'(x)$ 는

최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

또, 조건 ㉞에서 $f'(1) = f'(a) = f'(\beta) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 4(x-1)(x-a)(x-\beta)$$

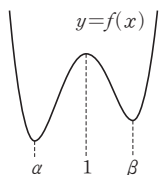
이고 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은

오른쪽 그림과 같으므로

$$a < 1 < \beta$$

..... ㉞

조건 ㉞에서



$$f'(-1)$$

$$= 4 \times (-2) \times (-1-a) \times (-1-\beta)$$

$$= -8(1+a)(1+\beta) = 14$$

$$(1+a)(1+\beta) = -\frac{7}{4}, \quad 1+a+\beta+a\beta = -\frac{7}{4}$$

$$\therefore a+\beta+a\beta = -\frac{11}{4} \quad \dots\dots ㉞$$

이때 조건 ㉞에서 $\beta = a+4$ 이므로 이것을 ㉞에 대입하면

$$a + (a+4) + a(a+4) = -\frac{11}{4}$$

$$a^2 + 6a + 4 = -\frac{11}{4}, \quad 4a^2 + 24a + 16 = -11$$

$$4a^2 + 24a + 27 = 0, \quad (2a+9)(2a+3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2} \text{ 또는 } a = -\frac{3}{2}$$

(i) $a = -\frac{9}{2}$ 일 때, $\beta = -\frac{9}{2} + 4 = -\frac{1}{2}$ 이므로 ㉞을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = -\frac{3}{2}$ 일 때, $\beta = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2}$ 이므로 ㉞을 만족시킨다.

$$(i), (ii) \text{에서 } a = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$f'(x) = 4(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore f'(0) = 4 \times (-1) \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 15$$

[답] ①

05 $f(x) = 2x^3 + px^2 - 12x + q$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 + 2px - 12$$

조건 ㉞에서

$$f'(1) = 6 + 2p - 12 = -12$$

$$2p = -6 \quad \therefore p = -3$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + q$$

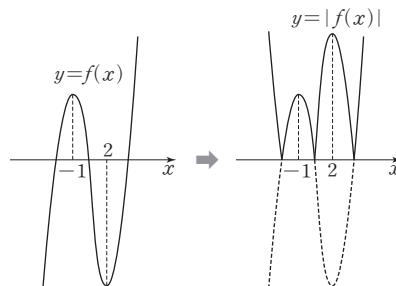
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$7+q$	$\searrow$	$-20+q$	$\nearrow$

조건 ㉞가 성립하려면 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1) > 0$, $f(2) < 0$ 이므로 함수 $|f(x)|$ 의 두 극댓값은 $f(-1)$, $-f(2)$ 이다. 따라서 조건 ㉞에서

$$|f(-1) - \{-f(2)\}| = 11, \quad |f(-1) + f(2)| = 11$$

$$|7+q-20+q|=11, |-13+2q|=11$$

$$-13+2q=\pm 11, 2q=13\pm 11, 2q=2 \text{ 또는 } 2q=24$$

$$\therefore q=1 (\because q<10)$$

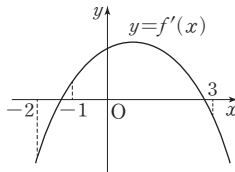
$$\therefore p+q=-3+1=-2$$

답 ①

- 06 α, β 가 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근이므로
 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
 이때 조건 (가)에서 $\alpha \neq \beta$ 이므로 $f(\alpha), f(\beta)$ 는 삼차함수 $f(x)$ 의 극값이다.
 조건 (나)에서
 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2 + \{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=13$
 $(\beta-\alpha)^2 + \{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=169$
 $5^2 + \{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=169 (\because \text{조건 (가)})$
 $\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=144$
 $\therefore |f(\beta)-f(\alpha)|=12$
 따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는 12이다.

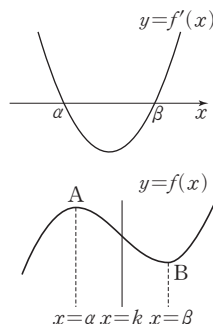
답 ③

- 07 $f(x)=-4x^3+ax^2+2a^2x-11$ 에서
 $f'(x)=-12x^2+2ax+2a^2$
 이때 이차방정식 $f'(x)=0$ 이
 $-2 < x < -1$ 에서 한 실근을 갖고,
 $-1 < x < 3$ 에서 한 실근을 가져야
 하므로 오른쪽 그림에서
 $f'(-2) < 0, f'(-1) > 0, f'(3) < 0$
 $f'(-2) < 0$ 에서
 $2a^2-4a-48 < 0, 2(a+4)(a-6) < 0$
 $\therefore -4 < a < 6$ ㉠
 $f'(-1) > 0$ 에서
 $2a^2-2a-12 > 0, 2(a+2)(a-3) > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 3$ ㉡
 $f'(3) < 0$ 에서
 $2a^2+6a-108 < 0, 2(a+9)(a-6) < 0$
 $\therefore -9 < a < 6$ ㉢
 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면
 $-4 < a < -2$ 또는 $3 < a < 6$
 따라서 정수 a 는 $-3, 4, 5$ 이므로 구하는 합은
 $-3+4+5=6$



답 ③

- 08 $f(x)=x^3-kx^2-64x+12$ 에서
 $f'(x)=3x^2-2kx-64$
 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha, x=\beta$ 에서 극값을 가지므로
 $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$
 직선 $x=k$ 가 두 점 $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ 사이를 지나므로
 $\alpha < k < \beta$
 즉, $f'(k) < 0$ 이어야 하므로



$$f'(k)=3k^2-2k^2-64 < 0, k^2-64 < 0$$

$$(k+8)(k-8) < 0 \quad \therefore -8 < k < 8$$

따라서 정수 k 는 $-7, -6, -5, \dots, 7$ 의 15개이다.

답 ③

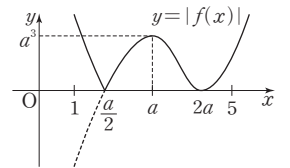
- 09 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+2$ 에서
 $f'(x)=3x^2+2ax+a+6$
 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=a^2-3(a+6) \leq 0, a^2-3a-18 \leq 0$
 $(a+3)(a-6) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 6$
 따라서 $m=-3, n=6$ 이므로
 $m-n=6-(-3)=9$

답 ②

- 10 $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x-4a^3=(2x-a)(x-2a)^2$ 에서
 $f'(x)=6x^2-18ax+12a^2=6(x-a)(x-2a)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=2a$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	a	$\dots$	$2a$	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	a^3	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $|f(x)|$ 는 $x=a$ 에서 극댓값, $x=\frac{a}{2}, x=2a$ 에서 극솟값을 갖는다.



$$\frac{a}{2}, a, 2a \text{가 열린구간 } (1, 5) \text{에 모두 존재하려면}$$

$$1 < \frac{a}{2}, 2a < 5 \quad \therefore 2 < a < \frac{5}{2}$$

따라서 $m=2, n=\frac{5}{2}$ 이므로 $mn=2 \times \frac{5}{2}=5$

답 ④

- 11 $f(x)=2x^4+4ax^3+9x^2+5$ 에서
 $f'(x)=8x^3+12ax^2+18x=2x(4x^2+6ax+9)$
 사차함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.
 (i) 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
 이차방정식 $4x^2+6ax+9=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(3a)^2-4 \times 9=9a^2-36 < 0, 9(a+2)(a-2) < 0$
 $\therefore -2 < a < 2$
 (ii) 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우
 이차방정식 $4x^2+6ax+9=0$ 이 $x=0$ 을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.
 따라서 $\frac{D}{4}=9a^2-36=0$ 에서 $a=\pm 2$

(i), (ii)에서 $-2 \leq a \leq 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$ 이므로

$$Mm=2 \times (-2) = -4$$

답 ④

12 $-1 < x < 0$ 일 때, $f(x) = -x^3 - 6x + 1$ 이므로

$$f'(x) = -3x^2 - 6 = -3(x^2 + 2) < 0$$

$0 < x < 1$ 일 때, $f(x) = -x^3 + 6x + 1$ 이므로

$$f'(x) = -3x^2 + 6 = -3(x^2 - 2) > 0$$

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	8	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 8, $x=0$ 에서 최솟값 1을 가지므로 $M=8$, $m=1$

$$\therefore M+m=8+1=9$$

답 ②

참고 $f'(0)$ 의 값은 존재하지 않는다.

13 $y = (x^2 - 2x - 2)^3 - 3(x^2 - 2x - 2) + 5$ 에서

$$t = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$$

으로 놓으면 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $-3 \leq t \leq 1$

$$\text{이고 } y = t^3 - 3t + 5$$

$$g(t) = t^3 - 3t + 5 \text{ 라 하면}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t+1)(t-1)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

$-3 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-3	...	-1	...	1
$g'(t)$		+	0	-	0
$g(t)$	-13	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 최댓값 7, $t=-3$ 에서 최솟값 -13을 가지므로 구하는 차는

$$7 - (-13) = 20$$

답 ④

14 가격을 x 원 올릴 때, 하루에 남긴 총 이익금을 $f(x)$ 원이라 하면

$$f(x) = (60+x)(3600-x^2)$$

$$f'(x) = (3600-x^2) + (60+x) \times (-2x)$$

$$= -3x^2 - 120x + 3600$$

$$= -3(x+60)(x-20)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 20 \text{ (} \because 0 < x < 60 \text{)}$$

$0 < x < 60$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	20	...	60
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	256000	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=20$ 에서 최대이므로 이익금이 최대가 되도록 제품의 가격을 정할 때 하루에 남긴 총 이익금은 256000원이다.

답 ④

15 점 B를 원점, 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 생각하여 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 포물선의 방정식을

$$y = ax(x-4) \text{ (} a \text{는 상수, } a < 0 \text{)}$$

라 하면 이 포물선이 점 E(2, 4)를 지나므로

$$4 = a \times 2 \times (-2) \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore y = -x(x-4) = -x^2 + 4x$$

$$\text{또, 직선 BF의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x$$

포물선과 직선 BF의 교점 G의 x 좌표는 $-x^2 + 4x = \frac{1}{2}x$ 에서

$$-2x^2 + 8x = x, 2x^2 - 7x = 0, x(2x-7) = 0$$

$$\therefore x = \frac{7}{2} \text{ (} \because x > 0 \text{)}$$

따라서 점 R의 x 좌표를 t 라 하면 $0 < t < \frac{7}{2}$ 이고 $P(t, \frac{1}{2}t)$

$$Q(t, -t^2 + 4t)$$

삼각형 BPQ의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{BR} \times \overline{PQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times t \times \left\{ (-t^2 + 4t) - \frac{1}{2}t \right\} = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{4}t^2$$

$$S'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{2}t = -\frac{1}{2}t(3t-7)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = \frac{7}{3} \text{ (} \because 0 < t < \frac{7}{2} \text{)}$$

$0 < t < \frac{7}{2}$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{7}{3}$	...	$\frac{7}{2}$
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$S(\frac{7}{3})$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$ 는 $t = \frac{7}{3}$ 에서 최대이므로

$$\overline{BR} = t = \frac{7}{3}$$

답 ③

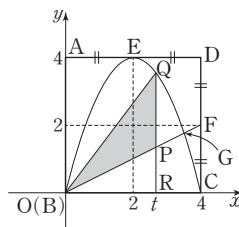
16 조건 ㉞의 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 6xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 각각 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

또, $y=h$ 를 대입하면

$$f(x+h) = f(x) + f(h) - 6xh(x+h)$$

이므로 도함수의 정의에 의하여



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - 6xh(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 6xh(x+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} - 6x(x+h) \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} - 6x(x+h) \right\} \\
 &= f'(0) - 6x^2 = 24 - 6x^2 \quad (\because \text{조건 (4)}) \\
 &= -6(x+2)(x-2)
 \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖고, $x=-2$ 에서 극솟값을 가지므로 $a=2, b=-2$

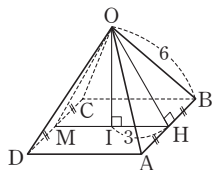
$$\therefore a-b=2-(-2)=4$$

답 ④

17 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이다.

오른쪽 그림과 같이 정사각뿔의 두 모서리 AB, CD의 중점을 각각 H, M이라 하면 정삼각형 OAB에서

$$\overline{OH} = \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$



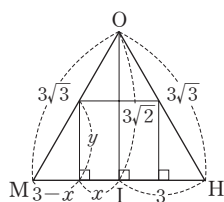
점 O에서 면 ABCD에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 OIH에서

$$\overline{OI} = \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{IH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$$

이때 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 $2x$ ($0 < x < 3$), 높이를 y 라 하면
오른쪽 그림에서

$$(3-x) : y = 3 : 3\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$$

$$\therefore y = \sqrt{2}(3-x)$$



직육면체의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = (2x)^2 \times \sqrt{2}(3-x) = -4\sqrt{2}x^3 + 12\sqrt{2}x^2$$

$$V'(x) = -12\sqrt{2}x^2 + 24\sqrt{2}x = -12\sqrt{2}x(x-2)$$

$$V'(x)=0 \text{에서 } x=2 \quad (\because 0 < x < 3)$$

$0 < x < 3$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	$16\sqrt{2}$	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $16\sqrt{2}$ 를 가지므로 직육면체의 부피의 최댓값은 $16\sqrt{2}$ 이다.

답 ④

18 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

..... ①

조건 (가)에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \therefore f(1) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = 0$$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값 -8 을 가지므로

$$f(3) = -8, f'(3) = 0$$

..... ②

$$f'(1) = 0, f'(3) = 0 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3a(x-1)(x-3) = 3ax^2 - 12ax + 9a$$

$$\text{이므로 } 2b = -12a, c = 9a$$

$$\therefore b = -6a, c = 9a$$

$$\text{따라서 } f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax + d \text{이므로}$$

$$f(1) = 0 \text{에서}$$

$$a - 6a + 9a + d = 0 \quad \therefore a = -\frac{d}{4} \quad \text{..... ⑦}$$

$$f(3) = -8 \text{에서}$$

$$27a - 54a + 27a + d = -8 \quad \therefore d = -8$$

$$d = -8 \text{을 ⑦에 대입하면 } a = 2 \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 8$$

..... ③

$$\therefore f(5) = 250 - 300 + 90 - 8 = 32$$

..... ④

답 32

채점기준	배점
① $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하고 $f'(x)$ 구하기	1
② $f(1), f'(1), f(3), f'(3)$ 의 값 구하기	2
③ $f(x)$ 구하기	2
④ $f(5)$ 의 값 구하기	1

19 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + b$ 에서

$$f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

..... ①

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-20a+b$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$-4a+b$	$\searrow$	b

..... ②

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최댓값 $-20a+b$, $x=0$ 또는 $x=3$ 에서 최솟값 b 를 갖는다.

이때 최댓값이 18, 최솟값이 -22 이므로

$$-20a + b = 18, b = -22$$

$$\text{따라서 } a = -2, b = -22 \text{이므로}$$

$$ab = -2 \times (-22) = 44$$

..... ③

답 44

채점기준	배점
① $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값 구하기	2
② 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내기	2
③ ab 의 값 구하기	2

수능형 기출문제 ... 변형문제

p.148~152

1 $f(x) = -x^4 + 8a^2x^2 - 1$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 16a^2x = -4x(x+2a)(x-2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2a \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-2a$	...	0	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2a$ 또는 $x = 2a$ 에서 극대이고 $a > 0$, $b > 1$ 이므로

$$-2a = 2 - 2b, 2a = b \rightarrow 2 - 2b < 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 2$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

답 ①

2 $f(x) = 2x^4 - 4a^2x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = 8x^3 - 8a^2x = 8x(x+a)(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -a \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-a$	...	0	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -a$ 또는 $x = a$ 에서 극소이다.

(i) $-a = b - 1, a = 2b - 8$ 일 때,

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 3$$

$a = -2$ 는 $a > 0$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $-a = 2b - 8, a = b - 1$ 일 때,

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 3$$

(i), (ii)에서 $a = 2, b = 3$

$$\therefore ab = 2 \times 3 = 6$$

답 ⑤

3 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 10$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = 3$ 에서 미분가능하고 연속이다.

함수 $g(x)$ 가 $x = 3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = g(3)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \{b - f(x)\} = b - f(3),$$

$$g(3) = f(3)$$

$$\therefore b - f(3) = f(3)$$

$$\therefore b = 2f(3) = 2(3a - 17) = 6a - 34 \quad \dots\dots ①$$

함수 $g(x)$ 가 $x = 3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= f'(3) = a - 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\{b - f(x)\} - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2f(3) - f(x) - f(3)}{x - 3} \quad (\because b = 2f(3))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-\{f(x) - f(3)\}}{x - 3}$$

$$= -f'(3) = -a + 9$$

이므로

$$a - 9 = -a + 9, 2a = 18 \quad \therefore a = 9$$

$$\therefore g'(3) = a - 9 = 9 - 9 = 0$$

$a = 9$ 를 ①에 대입하면 $b = 20$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} -x^3 + 6x^2 - 9x + 10 & (x < 3) \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 10 & (x \geq 3) \end{cases}$$

$$x < 3 \text{일 때, } g'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \quad (\because x < 3)$$

$$x = 3 \text{일 때, } g'(x) = g'(3) = 0$$

$$x > 3 \text{일 때, } g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) > 0$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	↘	6	↗		↗

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값 6을 갖는다.

답 6

4 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 12$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + a$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x = 2$ 에서 미분가능하고 연속이다.

함수 $g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = g(2)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \{f(x) + b\} = f(2) + b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \{-f(x)\} = -f(2),$$

$$g(2) = f(2) + b$$

$$\therefore b = -2f(2) = -2(2a + 16) = -4a - 32 \quad \dots\dots ①$$

함수 $g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\{f(x) + b\} - \{f(2) + b\}}{x - 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= f'(2) = a + 12, \\
\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-f(x) - \{f(2) + b\}}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-f(x) - \{f(2) - 2f(2)\}}{x - 2} \quad (\because b = -2f(2)) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-\{f(x) - f(2)\}}{x - 2} \\
&= -f'(2) = -a - 12
\end{aligned}$$

이므로

$$a + 12 = -a - 12, 2a = -24 \quad \therefore a = -12$$

$$\therefore g'(2) = a + 12 = -12 + 12 = 0$$

$$a = -12 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = 16$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} -2x^3 + 3x^2 + 12x - 12 & (x < 2) \\ 2x^3 - 3x^2 - 12x + 28 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$x < 2 \text{일 때 } g'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \quad (\because x < 2)$$

$$x = 2 \text{일 때 } g'(x) = g'(2) = 0$$

$$x > 2 \text{일 때 } g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2) > 0$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$		\searrow	-19	\nearrow	

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값 -19 를 가지므로

$$k = -1, m = -19$$

$$\therefore k + m = -1 + (-19) = -20$$

답 -20

- 5 $f(x) = x(x-a)(x-6) = x^3 - (a+6)x^2 + 6ax$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+6)x + 6a$$

점 $(0, 0)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t^3 - (a+6)t^2 + 6at) \text{라 하면}$$

접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 - 2(a+6)t + 6a$$

접선의 방정식은

$$y - \{t^3 - (a+6)t^2 + 6at\} = \{3t^2 - 2(a+6)t + 6a\}(x - t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\{t^3 - (a+6)t^2 + 6at\} = -t\{3t^2 - 2(a+6)t + 6a\}$$

$$2t^3 - (a+6)t^2 = 0, t^2\{2t - (a+6)\} = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{a+6}{2}$$

즉, 두 접선의 접점의 x 좌표는 각각 $0, \frac{a+6}{2}$ 이므로 두 접선의

기울기는 각각

$$f'(0) = 6a$$

$$f'\left(\frac{a+6}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{a+6}{2}\right)^2 - 2(a+6) \times \frac{a+6}{2} + 6a$$

$$= -\frac{1}{4}(a^2 - 12a + 36)$$

두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$ 라 하면

$$g(a) = 6a \times \left\{-\frac{1}{4}(a^2 - 12a + 36)\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}(a^3 - 12a^2 + 36a) \quad (0 < a < 6)$$

$$g'(a) = -\frac{3}{2}(3a^2 - 24a + 36) = -\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$$

$$g'(a) = 0 \text{에서 } a = 2 \quad (\because 0 < a < 6)$$

$0 < a < 6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	2	...	6
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		\searrow	-48	\nearrow	

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a = 2$ 에서 최솟값 -48 을 가지므로 구하는 최솟값은 -48 이다.

답 ③

- 6 $f(x) = x(x-2)(x-2a) = x^3 - 2(a+1)x^2 + 4ax$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 4(a+1)x + 4a$$

점 $(0, 0)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t^3 - 2(a+1)t^2 + 4at) \text{라 하면}$$

접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 - 4(a+1)t + 4a$$

접선의 방정식은

$$y - \{t^3 - 2(a+1)t^2 + 4at\} = \{3t^2 - 4(a+1)t + 4a\}(x - t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\{t^3 - 2(a+1)t^2 + 4at\} = -t\{3t^2 - 4(a+1)t + 4a\}$$

$$2t^3 - 2(a+1)t^2 = 0, 2t^2\{t - (a+1)\} = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = a+1$$

즉, 두 접선의 접점의 x 좌표는 각각 $0, a+1$ 이므로 두 접선의 기울기는 각각

$$f'(0) = 4a$$

$$f'(a+1) = 3(a+1)^2 - 4(a+1)^2 + 4a$$

$$= -a^2 + 2a - 1$$

두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$ 라 하면

$$g(a) = 4a \times (-a^2 + 2a - 1)$$

$$= -4a^3 + 8a^2 - 4a \quad (0 < a < 1)$$

$$g'(a) = -12a^2 + 16a - 4 = -4(3a-1)(a-1)$$

$$g'(a) = 0 \text{에서 } a = \frac{1}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$0 < a < 1$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		\searrow	$-\frac{16}{27}$	\nearrow	

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a=\frac{1}{3}$ 에서 최솟값 $-\frac{16}{27}$ 을 가지므로 구하는 최솟값은 $-\frac{16}{27}$ 이다. 답 ②

7 $f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$
 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq k-1$
 이때 $f(x)=t$ 로 놓으면 $t\geq k-1$ 이고
 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$
 $g(t)=2t^3-9t^2+12t-2$ 에서
 $g'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$
 $g'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

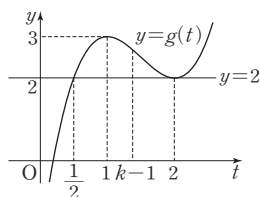
t	...	1	...	2	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=1$ 에서 극댓값 3, $t=2$ 에서 극솟값 2를 갖는다.

$t\geq k-1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 2이므로 $g(t)=2$ 에서
 $2t^3-9t^2+12t-2=2$, $2t^3-9t^2+12t-4=0$
 $(2t-1)(t-2)^2=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

따라서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 은 오른쪽 그림과 같으므로 $t\geq k-1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는



$\frac{1}{2}\leq k-1\leq 2 \quad \therefore \frac{3}{2}\leq k\leq 3$

따라서 실수 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다. 답 ⑤

8 $f(x)=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+k+4$
 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\leq k+4$
 이때 $f(x)=t$ 로 놓으면 $t\leq k+4$ 이고
 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$
 $g(t)=-2t^3+6t+1$ 에서
 $g'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$
 $g'(t)=0$ 에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-1	...	1	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=1$ 에서 극댓값 5, $t=-1$ 에서 극솟값 -3을 갖는다.

$t\leq k+4$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 -3이므로 $g(t)=-3$ 에서
 $-2t^3+6t+1=-3$, $2t^3-6t-4=0$

$$t^3-3t-2=0, (t+1)^2(t-2)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=2$$

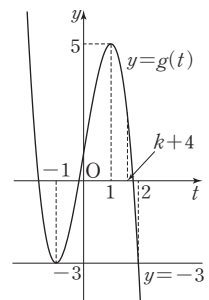
따라서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=-3$ 은 오른쪽 그림과 같으므로

$t\leq k+4$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 -3이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-1\leq k+4\leq 2$$

$$\therefore -5\leq k\leq -2$$

따라서 정수 k 는 -5, -4, -3, -2의 4개이다. 답 ②



9 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하자.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고 연속이다.

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 0+} g(x)=\lim_{x\rightarrow 0-} g(x)=g(0)$$

이때

$$\lim_{x\rightarrow 0+} g(x)=\lim_{x\rightarrow 0+} (x^3+ax^2+bx+c)=c,$$

$$\lim_{x\rightarrow 0-} g(x)=\lim_{x\rightarrow 0-} \frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$g(0)=c$$

$$\therefore c=\frac{1}{2} \quad \therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x\rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\rightarrow 0+} \frac{x^3+ax^2+bx}{x} \\ &= \lim_{x\rightarrow 0+} (x^2+ax+b)=b, \end{aligned}$$

$$\lim_{x\rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\rightarrow 0-} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$$

$$\therefore b=0 \quad \therefore g'(0)=0$$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$ 이므로

$$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}a$$

$x<0$ 에서 $g(x)=\frac{1}{2}$ 이고 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 보다 작으므로

함수 $f(x)$ 는 $x\geq 0$ 에서 극솟값을 가져야 한다. 이때 $a>0$ 이면 $f(x)$ 는 $x>0$ 에서 극솟값을 갖지 않으므로

$$a<0$$

$x\geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$-\frac{2}{3}a$	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}$	$\nearrow$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. g(0)=\frac{1}{2}, g'(0)=0 \text{이므로}$$

$$g(0)+g'(0)=\frac{1}{2} \text{ (참)}$$

$$\neg. g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=a+\frac{3}{2}$$

$$a<0 \text{이므로 } a+\frac{3}{2}<\frac{3}{2} \quad \therefore g(1)<\frac{3}{2} \text{ (참)}$$

ㄷ. 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 0이므로

$$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0, \frac{4}{27}a^3=-\frac{1}{2}, a^3=-\frac{27}{8}$$

$$\therefore a=-\frac{3}{2} (\because a<0)$$

$$\text{즉, } f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$g(2)=f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

10 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하자.

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고 연속이다.

함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = h(0)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3+ax^2+bx+c) = c,$$

$$h(0)=1$$

이므로 $c=1$

함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{x} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3+ax^2+bx}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+ax+b) = b \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } b=0 \quad \therefore h'(0)=0$$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+1$ 이므로

$$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{2}{3}a \text{ 또는 } x=0$$

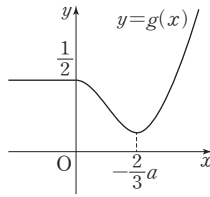
$x \geq 0$ 에서 $h(x)=1$ 이고 함수 $h(x)$ 의 최댓값이 1보다 크므로

함수 $f(x)$ 는 $x < 0$ 에서 극댓값을 가져야 한다. 이때 $a < 0$ 이면

$f(x)$ 는 $x < 0$ 에서 극댓값을 갖지 않으므로

$$a > 0$$

$x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	$\dots$	$-\frac{2}{3}a$	$\dots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}a^3+1$	$\searrow$	

따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의

개형은 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. h(0)=1, h'(0)=0 \text{이므로}$$

$$h(0)-h'(0)=1 \text{ (참)}$$

$$\neg. h\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}a+1=\frac{1}{4}a+\frac{7}{8}$$

$a > 0$ 이므로

$$\frac{1}{4}a+\frac{7}{8} > \frac{7}{8} \quad \therefore h\left(-\frac{1}{2}\right) > \frac{7}{8} \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 함수 $h(x)$ 의 최댓값이 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{4}{27}a^3+1=\frac{3}{2}, \frac{4}{27}a^3=\frac{1}{2}, a^3=\frac{27}{8}$$

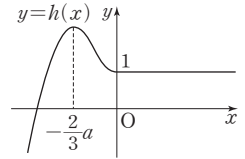
$$\therefore a=\frac{3}{2} (\because a>0)$$

$$\text{즉, } f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \text{이므로}$$

$$h(-2)=f(-2)=-8+6+1=-1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③



실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.154~157

01 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+6x}-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+6x}-x)(\sqrt{x^2+6x}+x)}{\sqrt{x^2+6x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+6x)-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1} \\ &= \frac{6}{1+1} = 3 \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5}{x^2+2} + \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+6x}-x) = 2+3=5$ 답 ①

02 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(1)}{a-1} &= \frac{(a^3-10a+2)-(1-10+2)}{a-1} \\ &= \frac{a^3-10a+9}{a-1} = \frac{(a-1)(a^2+a-9)}{a-1} \\ &= a^2+a-9 \end{aligned}$$

평균변화율이 3이어야 하므로

$$a^2+a-9=3$$

$$a^2+a-12=0, (a+4)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-4+3=-1$$

답 ②

03 $f(x)=x^3-6x^2+(2a-3)x$ 에서

$$f'(x)=3x^2-12x+2a-3=3(x-2)^2+2a-15$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, 3)$ 에서 감소

하려면 오른쪽 그림과 같이 $0 < x < 3$

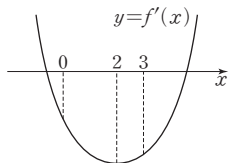
에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$f'(0)=2a-3 \leq 0$$

$$2a \leq 3 \quad \therefore a \leq \frac{3}{2}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 1이다.

답 ①



04 함수 $f(x)$ 가 $x=-3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3), \text{ 즉 } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-x+a}{x+3} = b$$

이때 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2-x+a) = 0, 9+3+a=0 \quad \therefore a=-12$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-x-12}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-4)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x-4) \\ &= -3-4 = -7 \end{aligned}$$

이므로 $b = -7$

$$\therefore a+b = -12 + (-7) = -19$$

답 ②

05 $f(x)-g(x)=h(x)$ 라 하면 $f(x)=h(x)+g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)-g(x)\} = 2 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\{h(x)+g(x)\}-g(x)}{\{h(x)+g(x)\}+g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3h(x)+2g(x)}{h(x)+2g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3h(x)}{g(x)}+2}{\frac{h(x)}{g(x)}+2} \end{aligned}$$

$$= \frac{0+2}{0+2} = 1$$

답 ①

다른풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)-g(x)\} = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3f(x)}{g(x)}-1}{\frac{f(x)}{g(x)}+1} \\ &= \frac{3-1}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

06 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a^2-13)x+2$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+(a^2-13)$$

삼차함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 극값이 존재하지 않아야

하므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. 즉,

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식

$f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 3(a^2-13) \leq 0, -2a^2+2a+40 \leq 0$$

$$a^2-a-20 \geq 0, (a+4)(a-5) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -4 \text{ 또는 } a \geq 5$$

답 ③

07 $f(x)=8x^3+ax^2+bx+c$ 에서 $f'(x)=24x^2+2ax+b$

이때 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0, f'\left(\frac{1}{4}\right)=0$ 이므로

$$f'(x)=24\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=24x^2+6x-3$$

즉, $2a=6, b=-3$ 이므로

$$a=3, b=-3$$

$$\therefore f(x)=8x^3+3x^2-3x+c$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$c+\frac{5}{4}$	$\searrow$	$c-\frac{7}{16}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{4}$ 에서 극솟값 $c-\frac{7}{16}$ 을 갖는다. 이때

극솟값이 $\frac{9}{16}$ 이므로

$$c-\frac{7}{16}=\frac{9}{16} \quad \therefore c=1$$

$$\therefore abc=3 \times (-3) \times 1 = -9$$

답 ①

08 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 2 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ (참)

$\cup$. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 2 \times 2 = 4,$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ = 3 \times (-2) = -6$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x)$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

$\cap$. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 3$$

$g(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $s \rightarrow 2+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 2+} g(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow -1-} g(g(x)) = 3 + 1 = 4 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\cap$ 이다.

답 ④

09 $\neg$. $g(x)=f(x)-x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$$g(0)=f(0)-0=1-0=1,$$

$$g(2)=f(2)-2=3-2=1$$

이때 $g(0)g(2)>0$ 이므로 열린구간 $(0, 2)$ 에서 방정식

$g(x)=0$ 의 실근이 반드시 존재한다고 할 수는 없다.

$\cup$. $h(x)=f(x)-x^2$ 이라 하면 함수 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$$h(0)=f(0)-0^2=1-0=1,$$

$$h(2)=f(2)-2^2=3-4=-1$$

이때 $h(0)h(2)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(0, 2)$ 에서 방정식 $h(x)=0$ 의 실근이 적어도 하나 존재한다.

$\cap$. $i(x)=f(x)-\sqrt{x+4}$ 라 하면 함수 $i(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$$i(0)=f(0)-\sqrt{4}=1-2=-1<0,$$

$$i(2)=f(2)-\sqrt{6}=3-\sqrt{6}>0$$

이때 $i(0)i(2)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 열린구간

$(0, 2)$ 에서 방정식 $i(x)=0$ 의 실근이 적어도 하나 존재한다.

따라서 열린구간 $(0, 2)$ 에서 실근이 반드시 존재하는 방정식은

$\cup$, $\cap$ 이다.

답 ⑤

10 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-8}{x^2-4} = -1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-8\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-8}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(2) = -1 \end{aligned}$$

이므로 $f'(2) = -4$

한편 $g(x) = (5x-3)f(x)$ 에서

$$g'(x) = 5f(x) + (5x-3)f'(x)$$

이므로

$$\begin{aligned} g'(2) &= 5f(2) + 7f'(2) \\ &= 5 \times 8 + 7 \times (-4) = 12 \end{aligned}$$

답 ④

11 조건 ㉞의 등식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

조건 ㉝에서

$$f'(-4)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(-4) + f(h) - 12h(-4+h+2)\} - f(-4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 12h(-2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} - 12(-2+h) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h-0} - 12(-2+h) \right\}$$

$$= f'(0) + 24 = 15$$

$$\therefore f'(0) = -9$$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x) + f(h) + 3xh(x+h+2)\} - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 3xh(x+h+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 3x(x+h+2) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h-0} + 3x(x+h+2) \right\}$$

$$= f'(0) + 3x(x+2)$$

$$= -9 + 3x(x+2) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$\therefore f'(-1) = 3 - 6 - 9 = -12$$

답 ①

12 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = -x$$

점 A에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선

의 접점의 좌표를 $(t, -\frac{1}{2}t^2 + 3)$ 이라

하면 접선의 기울기는 $f'(t) = -t$ 이므로
접선의 방정식은

$$y = -t(x-t) - \frac{1}{2}t^2 + 3$$

이 직선이 점 A(1, 7)을 지나므로

$$7 = -t(1-t) - \frac{1}{2}t^2 + 3, \frac{1}{2}t^2 - t - 4 = 0$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0, (t+2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$\text{이때 } f(-2) = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 = 1, f(4) = -\frac{1}{2} \times 16 + 3 = -5$$

이므로 B(-2, 1), C(4, -5)

$$\therefore BC = \sqrt{\{4 - (-2)\}^2 + \{-5 - 1\}^2} = 6\sqrt{2}$$

또, 직선 BC의 기울기는 $\frac{-5-1}{4-(-2)} = -1$ 이므로 직선 BC의

방정식은

$$y-1 = -(x-(-2))$$

$$\therefore x+y+1=0$$

이때 점 A와 직선 BC 사이의 거리는

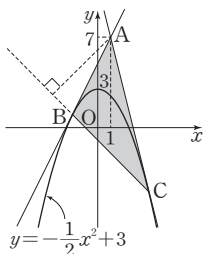
$$\frac{|1+7+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times BC \times (\text{점 A와 직선 BC 사이의 거리})$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} = 27$$

답 ④



13 ㄱ. $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(a)-0}{a-0}$ 은 두 점 (0, 0), (a, f(a))를 지나는

직선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a} = 1$$

$\frac{f(c)}{c} = \frac{f(c)-0}{c-0}$ 은 두 점 (0, 0), (c, f(c))를 지나는 직

선의 기울기이므로

$$\frac{f(c)}{c} = 1$$

$$\therefore \frac{f(a)}{a} = \frac{f(c)}{c} \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 두 점 (a, f(a)), (b, f(b))를

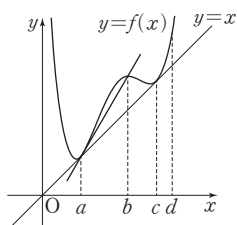
지나는 직선의 기울기는 1보다

크므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$$

이때 $b-a > 0$ 이므로

$$f(b)-f(a) > b-a \text{ (참)}$$



ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점

(c, f(c))에서의 접선은 직선

$y=x$ 이고 접선의 기울기는

$$f'(c) \text{이므로}$$

$$f'(c) = 1$$

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=b$

에서 극값을 가지므로

$$f'(b) = 0$$

$$\therefore f'(c) > f'(b) \text{ (참)}$$

ㄹ. $c \leq x \leq d$ 일 때, 함수 $y=f(x)$

의 그래프 위의 점에서의 접선의

기울기는 증가하므로 $c \leq x \leq d$

에서 $f'(x)$ 는 증가한다.

이때 $c > 0, d > 0$ 이므로 산술평
균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{c+d}{2} > \sqrt{cd}$$

$$c < \sqrt{cd} < \frac{c+d}{2} < d \text{이므로}$$

$$f'(\sqrt{cd}) < f'\left(\frac{c+d}{2}\right) \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $\frac{f(d)-f(b)}{d-b}$ 은 두 점

(b, f(b)), (d, f(d))를 지나

는 직선의 기울기이고,

$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$ 은 두 점

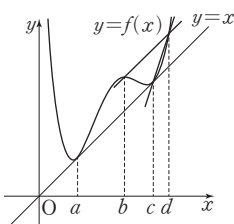
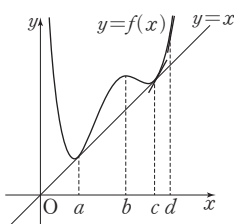
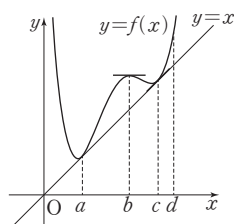
(c, f(c)), (d, f(d))를 지나

는 직선의 기울기이므로

$$\frac{f(d)-f(b)}{d-b} < \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다.

답 ②



14 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면

의 반지름의 길이를 x cm, 원뿔의

꼭짓점과 원기둥의 위쪽 밑면 사이

의 거리를 h cm라 하면

$$h : x = 24 : 6 = 4 : 1$$

$$\therefore h = 4x$$

즉, 원기둥의 높이는 $24-h = 24-4x$ (cm)이므로 원기둥의 부
피를 $V(x)$ cm³이라 하면

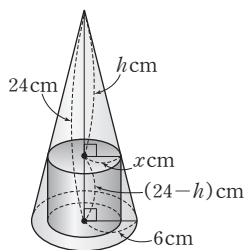
$$V(x) = \pi x^2 (24-4x) = \pi (-4x^3 + 24x^2)$$

$$V'(x) = \pi (-12x^2 + 48x) = -12\pi x(x-4) \text{이므로}$$

$$V'(x) = 0 \text{에서 } x = 4 (\because 0 < x < 6)$$

$0 < x < 6$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음
과 같다.

x	0	...	4	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	128π	↘	



따라서 함수 $V(x)$ 는 $x=4$ 에서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $128\pi \text{ cm}^3$ 이다. 답 ③

15 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{ax^2 - (2a-1)x + b\} = a - (2a-1) + b = -a + b + 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (2x^2 + 1) = 2 + 1 = 3,$$

$$f(1) = a - (2a-1) + b = -a + b + 1$$

$$\text{이므로 } -a + b + 1 = 3 \quad \therefore -a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$ 이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} \{ax^2 - (2a-1)x + b\} \\ &= 9a - 3(2a-1) + b = 3a + b + 3 \end{aligned}$$

$f(x+5) = f(x)$ 의 양변에 $x = -2$ 를 대입하면

$$f(3) = f(-2) = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$\text{즉, } 3a + b + 3 = 9 \text{이므로 } 3a + b = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 1, b = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & (-2 \leq x < 1) \\ x^2 - x + 3 & (1 \leq x < 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(12) = f(7) = f(2) = 4 - 2 + 3 = 5 \quad \text{답 ④}$$

16 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0)$ 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-10) = -10$$

$f(x)$ 가 연속함수이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -10$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - (-10)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-10 - (-10)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad (\because f(0) = -10)$$

$$\therefore f'(0) = 0$$

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(0) = -10 \text{이므로 } c = -10$$

$$\text{또, } f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \text{이고, } f'(0) = 0 \text{이므로 } b = 0$$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 + 2ax$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 6x^2 + 2ax = 0, 2x(3x + a) = 0$$

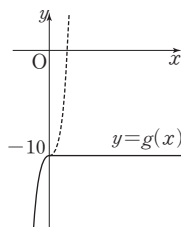
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -\frac{a}{3}$$

이때 $a=0$ 이면 $f(x) = 2x^3 - 10$ 이고,

$y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

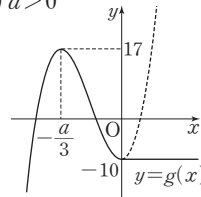
므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 17이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a \neq 0$ 이고, 삼차함수 $f(x)$ 는 극값을 갖는다.



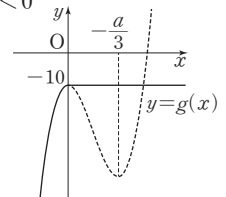
이때 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

(i) $a > 0$



[그림 1]

(ii) $a < 0$



[그림 2]

그런데 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 17이므로 [그림 1]과 같아야 한다.

즉, 삼차함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{a}{3}$ ($a > 0$)에서 극댓값 17을 갖는다.

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 10 \text{에서 } f\left(-\frac{a}{3}\right) = 17 \text{이므로}$$

$$-\frac{2}{27}a^3 + \frac{a^3}{9} - 10 = 17, \frac{a^3}{27} = 27 \quad \therefore a = 9$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 10$ 이므로

$$g(-4) = f(-4) = -128 + 144 - 10 = 6 \quad \text{답 ④}$$

17 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

곡선 $y = h(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned} h'(1) &= f'(1)g(1) + f(1)g'(1) \\ &= (-3) \times 2 + 1 \times 5 = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$h(1) = f(1)g(1) = 1 \times 2 = 2$ 이므로 곡선 $y = h(x)$ 위의 점

$(1, 2)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$$y - 2 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $a = -1, b = 3$ 이므로

$$ab = -1 \times 3 = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 -3

채점기준	배점
① 접선의 기울기 구하기	2
② 접선의 방정식 구하기	3
③ ab의 값 구하기	1

18 조건 ㉞에서 삼차함수 $f(x)$ 는 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로

$$f(x) = a(x+1)^2(x-b) \quad (a, b \text{는 상수, } a \neq 0)$$

로 놓을 수 있다. ①

이때 조건 ㉝에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) + 9\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -9$$

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -9 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\text{즉, } 9a(2-b) = -9 \text{이므로}$$

$$a(2-b) = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3 \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2a(x+1)(x-b) + a(x+1)^2 \\ &= a(x+1)\{2(x-b) + (x+1)\} \\ &= a(x+1)(3x - 2b + 1) \end{aligned}$$

이므로 $f'(2)=3a(7-2b)=3$

$\therefore a(7-2b)=1$ ㉔

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$a=1, b=3$

따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-3)$ 이므로

$f(1)=4 \times (-2)=-8$

..... ㉕

..... ㉖

답 -8

채점기준	배점
① $f(x)=a(x+1)^2(x-b)$ 꼴임을 설명하기	1
② $f(2)=-9$ 임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 세우기	2
③ $f'(2)=3$ 임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 세우기	2
④ $f(1)$ 의 값 구하기	1

- 19 두 삼각형 APB, ABQ의 높이는 $\overline{AB}$ 로 같으므로 주어진 극한 값을 구할 때는 두 삼각형의 밑변의 길이만 알아도 된다.

점 $B(t, \frac{1}{3}t+1)$ 을 지나고 직선 $y=\frac{1}{3}x+1$ 에 수직인 직선의 방정식은

$y=-3(x-t)+\frac{1}{3}t+1$ ㉗

㉗에 $y=0$ 을 대입하면

$0=-3(x-t)+\frac{1}{3}t+1$

$3x=\frac{10}{3}t+1$

$\therefore x=\frac{10}{9}t+\frac{1}{3}$

$\therefore P(\frac{10}{9}t+\frac{1}{3}, 0)$

㉗에 $x=0$ 을 대입하면

$y=-3 \times (-t)+\frac{1}{3}t+1=\frac{10}{3}t+1$

$\therefore Q(0, \frac{10}{3}t+1)$ ㉘

따라서

$$\begin{aligned}\overline{PB} &= \sqrt{\left\{t - \left(\frac{10}{9}t + \frac{1}{3}\right)\right\}^2 + \left\{\left(\frac{1}{3}t + 1\right) - 0\right\}^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{9}t - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t + 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}t + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t + 1\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}\left(\frac{1}{3}t + 1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{QB} &= \sqrt{(t-0)^2 + \left\{\left(\frac{1}{3}t + 1\right) - \left(\frac{10}{3}t + 1\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{t^2 + (-3t)^2} = \sqrt{10}t\end{aligned}$$
 ㉙

이므로

$$\begin{aligned}f(t) &= \triangle APB = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PB} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB} \times \frac{\sqrt{10}}{3} \left(\frac{1}{3}t + 1\right)\end{aligned}$$

$g(t) = \triangle ABQ = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{QB} = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \sqrt{10}t$ ㉚

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{f(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \overline{AB} \times \sqrt{10}t}{\frac{1}{2} \overline{AB} \times \frac{\sqrt{10}}{3} \left(\frac{1}{3}t + 1\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{10}t}{\frac{\sqrt{10}}{3} \left(\frac{1}{3}t + 1\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{10}}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{t}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{10}}{3} \times \frac{1}{3}} = 9\end{aligned}$$
 ㉛

답 9

채점기준	배점
① 두 점 P, Q의 좌표 구하기	1
② $\overline{PB}, \overline{QB}$ 의 길이 구하기	1
③ 두 함수 $f(t), g(t)$ 구하기	2
④ $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{f(t)}$ 의 값 구하기	2

- 20 함수 $(f \circ g)(x)$, 즉 $f(g(x))$ 가 $x=3$ 에서 불연속이 되려면 $\lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)), f(g(3))$ 중 어느 하나가 존재하지 않거나, 둘 다 존재한다면 두 값이 일치하지 않아야 한다. ㉜

$g(x) = -x^2 + 6x - k = -(x-3)^2 - k + 9$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow (-k+9)-$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow (-k+9)-} f(t)$

$f(g(3)) = f(-k+9)$

이때 함수 $f(g(x))$ 가 $x=3$ 에서 불연속이려면

$\lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) \neq f(g(3))$ 이어야 하므로

$\lim_{t \rightarrow (-k+9)-} f(t) \neq f(-k+9) \leftarrow t = -k+9$ 에서 좌극한값과 함수값이 불일치

이어야 한다. ㉝

$-k+9=-1$ 일 때, $\lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = -1, f(-1)=0$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow -1-} f(t) \neq f(-1)$

$-k+9=0$ 일 때, $\lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = -1, f(0)=-1$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \neq f(0)$

$-k+9=1$ 일 때, $\lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1, f(1)=0$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow 1-} f(t) \neq f(1)$

즉, $-k+9=-1$ 또는 $-k+9=1$ 이므로

$k=10$ 또는 $k=8$ ㉞

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$10+8=18$ ㉟

답 18

채점기준	배점
① 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=3$ 에서 불연속이 될 조건 말하기	1
② 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=3$ 에서 불연속이 될 $f(x)$ 의 조건 알기	2
③ k 의 값 구하기	3
④ 모든 실수 k 의 값의 합 구하기	1

01 $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ 이라 하면 $f'(x) = -2x + 6$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(4) = -8 + 6 = -2$$

답 ②

02 ① 함수 $y = 3x^2 - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그

림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 1) = \infty$$

$$\textcircled{2} |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ 이므로 극한값은 존재하지 않는다.

③ 함수 $y = \frac{1}{|x+2|}$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{|x+2|} = \infty$$

$$\textcircled{4} |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -(x-1) & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{|x-1|} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{|x-1|}$ 이므로 극한값은 존재하지

않는다.

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

03 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + f(0) = -2 + 2 + 1 = 1$$

답 ③

04 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $x^3 + ax^2 + bx - 1 = (x+1)^2 Q(x) + x + 3$ ㉠

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-1 + a - b - 1 = -1 + 3 \quad \therefore a - b = 4$$

..... ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 2ax + b$$

$$= 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + 1$$

..... ㉢

㉢의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$3 - 2a + b = 1 \quad \therefore -2a + b = -2$$

..... ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = -6$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x - 1$ 이므로

$$f(3) = 27 - 18 - 18 - 1 = -10$$

답 ②

05 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$ 에서도 연속
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+a}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (bx+6) = 2b+6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠에서 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+a}{\sqrt{x+2}-2}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a) = 0, \quad 2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2}+2) = \sqrt{4}+2=4$$

따라서 ㉠에서

$$4 = 2b+6, \quad 2b = -2 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore ab = -2 \times (-1) = 2$$

답 ④

06 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음
 과 같다.

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\searrow$	-15	$\nearrow$	10

$0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 10, $x=2$ 에서 최
 소값 -15를 갖는다.

따라서 $M=10$, $m=-15$ 이므로

$$M+m = 10 + (-15) = -5$$

답 ①

07 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(1)(x-1) + 4$$

이 접선이 점 $(-1, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = -2f'(1) + 4, \quad 2f'(1) = 6 \quad \therefore f'(1) = 3$$

이때 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이므로}$$

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 3 \quad \therefore b = -2a$$

즉, $f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax + c$ 이고, 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점

$(1, 4)$, $(-1, -2)$ 를 지나므로

$$f(1) = 1 + a - 2a + c = 4 \quad \therefore -a + c = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(-1) = -1 + a + 2a + c = -2 \quad \therefore 3a + c = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -1$, $c = 2$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2$ 이므로

$$f(2) = 8 - 4 + 4 + 2 = 10$$

답 ④

다른풀이 두 점 $(1, 4), (-1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4 = \frac{-2-4}{-1-1}(x-1) \quad \therefore y=3x+1$$

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3x+1$ 은 $x=1$ 에서 접하고 $x=-1$ 에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)=3x+1$, 즉 $f(x)-3x-1=0$ 은 $x=1$ 을 중근으로 갖고 $x=-1$ 을 나머지 한 근으로 갖는다. 또, 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-3x-1=(x-1)^2(x+1)$$

$$\therefore f(x)=(x-1)^2(x+1)+3x+1$$

$$\therefore f(2)=1^2 \times (2+1)+6+1=10$$

08 $f(x)=x^3-ax^2+ax-3$ 에서 $f'(x)=3x^2-2ax+a$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근을

α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$0 < \alpha < 1, 2 < \beta < 3$ 이어야 하므로

$$f'(0) > 0, f'(1) < 0, f'(2) < 0,$$

$$f'(3) > 0$$

$$f'(0) > 0 \text{에서 } a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(1) < 0 \text{에서 } -a+3 < 0$$

$$-a < -3 \quad \therefore a > 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$f'(2) < 0 \text{에서 } 12-4a+a < 0$$

$$-3a < -12 \quad \therefore a > 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$f'(3) > 0 \text{에서}$$

$$-5a+27 > 0, -5a > -27$$

$$\therefore a < \frac{27}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 의 공통부분을 구하면 $4 < a < \frac{27}{5}$

a 는 정수이므로 $a=5$

답 ⑤

09 $f(1)-f(-1)=2f'(c)$ 에서 $\frac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$

$$\therefore \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $\textcircled{㉠}$ 을 만족시키는 실수 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 존재하지 않는다.

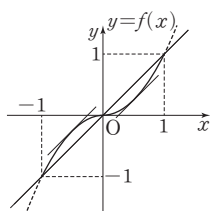
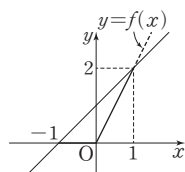
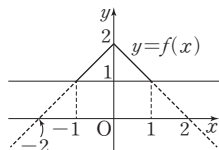
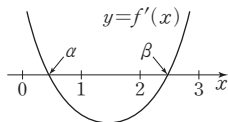
$$\therefore f(x)=x+|x|=\begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과

같으므로 $\textcircled{㉠}$ 을 만족시키는 실수 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 존재하지 않는다.

$$\therefore f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{이때 } f'(x)=\begin{cases} 2x & (x > 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases} \text{이고,}$$



$$f'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

$$=0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\textcircled{㉠}$ 을 만족시키는 실수 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{ㄹ. } x^2-4=(x+2)(x-2) \geq 0 \text{에서 } x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$x^2-4=(x+2)(x-2) < 0 \text{에서 } -2 < x < 2$$

$$\therefore f(x)=|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|$$

$$=\begin{cases} (x+2)(x-2) & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -(x+2)(x-2) & (-2 < x < 2) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$

에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에

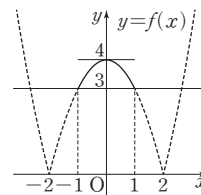
서 미분가능하므로 평균값 정리에

의하여 $\textcircled{㉠}$ 을 만족시키는 c 가 열린구

간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는

$\text{ㄷ}, \text{ㄹ}$ 의 2개이다.



답 ③

10 $\frac{1}{n}=h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(-1+\frac{3}{n}\right) - g\left(-1-\frac{4}{n}\right) \right\}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+3h)-g(-1-4h)}{2h}$$

이때 $f(-1)=6, g(-1)=6$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+3h)-g(-1-4h)}{2h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+3h)-6-\{g(-1-4h)-6\}}{2h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+3h)-f(-1)-\{g(-1-4h)-g(-1)\}}{2h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(-1+3h)-f(-1)}{2h} - \frac{g(-1-4h)-g(-1)}{2h} \right\}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(-1+3h)-f(-1)}{3h} \times \frac{3}{2} - \frac{g(-1-4h)-g(-1)}{-4h} \times (-2) \right\}$$

$$=\frac{3}{2}f'(-1)+2g'(-1)$$

이때 $f(x)=-x^6+x^2+6$ 에서

$$f'(x)=-6x^5+2x \text{이므로}$$

$$f'(-1)=6-2=4$$

$$g(x)=3x^5-2x^4+11 \text{에서}$$

$$g'(x)=15x^4-8x^3 \text{이므로}$$

$$g'(-1)=15+8=23$$

$$\therefore \frac{3}{2}f'(-1)+2g'(-1)=\frac{3}{2} \times 4+2 \times 23=52$$

답 ①

- 11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^4} = 4$ 에서 다항함수 $\{f(x)\}^2$ 은 x^4 의 계수가 4인 사차함수이고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이므로 $f(x)$ 는 x^2 의 계수가 2인 이차함수이다. 따라서

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3 \text{에서 극한값이 존재하고}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0, \quad 1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) \\ &= a+2=3 \end{aligned}$$

이므로 $a=1$

$a=1$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$b = -1 - 1 = -2$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + x - 2$ 이므로

$$f(2) = 8 + 2 - 2 = 8 \quad \text{답 ④}$$

- 12 점 D의 x좌표를 t ($0 < t < 3$)라 하면 $D(t, -t^2+9)$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times (2t+6) \times (-t^2+9)$$

$$= (t+3)(-t^2+9)$$

$$= -t^3 - 3t^2 + 9t + 27$$

$$S'(t) = -3t^2 - 6t + 9$$

$$= -3(t+3)(t-1)$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } t=1 \quad (\because 0 < t < 3)$$

$0 < t < 3$ 에서 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	32	↘	

따라서 $S(t)$ 는 $t=1$ 에서 최대이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$S(1) = 32 \quad \text{답 ⑤}$$

- 13 $f(x) = (x+1)^2(x+7) = (x+1)(x+1)(x+7)$ 에서

$$f'(x) = (x+1)(x+7) + (x+1)(x+7) + (x+1)^2$$

$$= 2(x+1)(x+7) + (x+1)^2$$

$$= (x+1)\{2(x+7) + (x+1)\}$$

$$= (x+1)(3x+15)$$

$$= 3(x+1)(x+5)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-5 \text{ 또는 } x=-1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-5	...	-1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

이때 $g(t)=3$, 즉 함수 $|f(x)+t|$

가 서로 다른 세 점에서 미분가능하

지 않으려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래

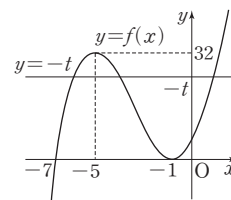
프와 직선 $y=-t$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$0 < -t < 32$$

$$\therefore -32 < t < 0$$

따라서 정수 t 의 최댓값은 -1 이다.

답 ③



- 14 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{12}$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -1$

일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\therefore f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

이때 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=0$,

$$f(3)=0 \text{이므로}$$

$$f(x) = (x+1)(x-3)(x-a) \quad (a \text{는 상수})$$

라 하면

$$f'(x) = (x-3)(x-a) + (x+1)(x-a) + (x+1)(x-3)$$

$$= 3x^2 - (2a+4)x + 2a-3$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)\{f'(x)\}^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)(x-a)}{(x+1)\{3x^2 - (2a+4)x + 2a-3\}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-3)(x-a)}{\{3x^2 - (2a+4)x + 2a-3\}^2} \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ &= \frac{4a+4}{(4a+4)^2} = \frac{1}{4a+4} \quad (\because a \neq -1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12}$$

이므로

$$4a+4=12, \quad 4a=8 \quad \therefore a=2$$

따라서 $f(x) = (x+1)(x-3)(x-2)$ 이므로

$$f(-2) = -1 \times (-5) \times (-4) = -20$$

답 ①

참고 $a=-1$ 이면 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-3)(x+1)}{(3x^2-2x-5)^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-3)(x+1)}{\{(x+1)(3x-5)\}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{(x+1)(3x-5)^2} \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 $\textcircled{8} \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -1$ 일 때 $\textcircled{8} \rightarrow \infty$ 이므로

로 $a \neq -1$

15 $P(t, \sqrt{2t+4})$ 이고, 점 Q 의 y 좌표는

$$t^2 + y^2 = 4 \text{에서}$$

$$y^2 = 4 - t^2 \quad \therefore y = \sqrt{4 - t^2} \quad (\because y > 0)$$

$$\therefore Q(t, \sqrt{4 - t^2})$$

따라서

$$f(t) = \overline{PQ} = \sqrt{2t+4} - \sqrt{4-t^2},$$

$$g(t) = \overline{OP} = \sqrt{t^2 + (\sqrt{2t+4})^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 4}$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{\{g(t)\}^2 - 4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2t+4} - \sqrt{4-t^2}}{(\sqrt{t^2+2t+4})^2 - 4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2t+4} - \sqrt{4-t^2}}{t^2 + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{2t+4} - \sqrt{4-t^2})(\sqrt{2t+4} + \sqrt{4-t^2})}{(t^2 + 2t)(\sqrt{2t+4} + \sqrt{4-t^2})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2t+4) - (4-t^2)}{(t^2 + 2t)(\sqrt{2t+4} + \sqrt{4-t^2})}$$

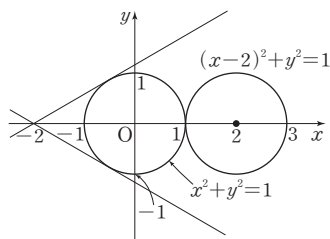
$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 + 2t}{(t^2 + 2t)(\sqrt{2t+4} + \sqrt{4-t^2})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2t+4} + \sqrt{4-t^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

답 ①

16 $\neg$.



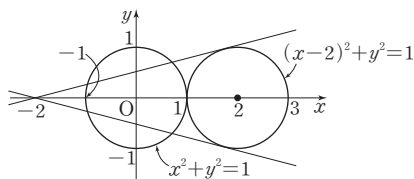
$f(t)=1$ 이면 위의 그림과 같이 직선 $y=t(x+2)$ 가 원 $x^2+y^2=1$ 에 접해야 한다. 이때 원점과 직선 $y=t(x+2)$, 즉 $tx-y+2t=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|2t|}{\sqrt{t^2+(-1)^2}}=1, |2t|=\sqrt{t^2+1}, 4t^2=t^2+1$$

$$3t^2=1, t^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (참)}$$

$\neg$.



위의 그림과 같이 직선 $y=t(x+2)$ 가 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 에 접할 때, 점 $(2,0)$ 과 직선 $y=t(x+2)$, 즉 $tx-y+2t=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|2t-0+2t|}{\sqrt{t^2+(-1)^2}}=1, |4t|=\sqrt{t^2+1}, 16t^2=t^2+1$$

$$15t^2=1, t^2=\frac{1}{15}$$

$$\therefore t=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$$

$t < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 직선과 두 원의 교점의 개수는

$$0 \text{이므로 } f(t)=0$$

$t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 직선과 두 원의 교점의 개수는 1이므로

$$f(t)=1$$

$-\frac{\sqrt{3}}{3} < t < -\frac{\sqrt{15}}{15}$ 또는 $\frac{\sqrt{15}}{15} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 직선과 두 원

의 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

$t=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$ 일 때, 직선과 두 원의 교점의 개수는 3이므로

$$f(t)=3$$

$-\frac{\sqrt{15}}{15} < t < 0$ 또는 $0 < t < \frac{\sqrt{15}}{15}$ 일 때, 직선과 두 원의 교점

의 개수는 4이므로 $f(t)=4$

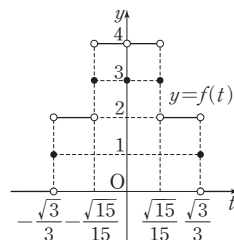
$t=0$ 일 때, 직선과 두 원의 교점의 개수는 3이므로 $f(t)=3$

따라서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고,

$\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)=2$ 인 양수 a 의 최솟

값은 $\frac{\sqrt{15}}{15}$ 이다. (참)



ㄷ. 함수 $f(t)$ 는 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$, $t=0$ 에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(t)$ 가 $t=p$ 에서 불연속인 실수 p 의 개수는 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ⑤

17 $f(x) + xf'(x) + 8x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$ 에서

$$f(x) + xf'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

다항함수 $f(x)$ 의 차수를 n (n 은 자연수)이라 하면 $f'(x)$ 의 차수는 $n-1$ 이다. 즉, $f(x)$ 의 n 차항을 ax^n (a 는 0이 아닌 상수)이라 하면 $f'(x)$ 의 $(n-1)$ 차항은 nax^{n-1} 이므로

$f(x) + xf'(x)$ 에서 x^n 항은

$$ax^n + nax^n = a(n+1)x^n$$

이때 $a(n+1) \neq 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 좌변의 차수는 n , 우변의 차수는 3이다. 즉, $f(x)$ 는 삼차함수이다. $\cdots \cdots \textcircled{1}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + x(3ax^2 + 2bx + c)$$

$$= -8x^3 + 3x^2 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned}
 & ax^3+bx^2+cx+d+3ax^3+2bx^2+cx \\
 & =-8x^3+3x^2-2x+3 \\
 & \therefore 4ax^3+3bx^2+2cx+d=-8x^3+3x^2-2x+3 \\
 & \text{위의 등식이 모든 실수 } x \text{에 대하여 성립하므로} \\
 & 4a=-8, 3b=3, 2c=-2, d=3 \\
 & \therefore a=-2, b=1, c=-1, d=3 \\
 & \text{따라서 } f(x)=-2x^3+x^2-x+3 \text{이므로} \quad \dots\dots ② \\
 & f(-1)=2+1+1+3=7 \quad \dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 7

채점기준	배점
① $f(x)$ 의 차수 구하기	2
② $f(x)$ 구하기	3
③ $f(-1)$ 의 값 구하기	1

참고 $f(x)$ 가 상수함수이면 $f(x)=c$ (c 는 상수), $f'(x)=0$ 이므로 ①에서 $c=-8x^3+3x^2-2x+3$
이 등식을 만족시키는 실수 x 는 최대 3개뿐이므로 조건을 만족시키지 않는다.

18 $\frac{1}{3}x^2+x < f(x) < 3x^2+x$ ($x \neq 0$) $\dots\dots ①$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3}x^2+x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2+x) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \dots\dots ①$

또, $x > 0$ 일 때, ①의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{1}{3}x+1 < \frac{f(x)}{x} < 3x+1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{3}x+1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} (3x+1) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$x < 0$ 일 때, ①의 각 변을 x 로 나누면

$$3x+1 < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{3}x+1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0-} (3x+1) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{3}x+1 \right) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x} = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)-8x}{3f(x)+x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-8}{3 \times \frac{f(x)}{x} + 1} \\
 &= \frac{0-8}{3 \times 1 + 1} = -2 \quad \dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 -2

채점기준	배점
① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값 구하기	2
② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값 구하기	2
③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)-8x}{3f(x)+x}$ 의 값 구하기	2

19 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ 라 하면 $f'(x)=-x$

직선 AB의 기울기가 $\frac{0-2}{2-0}=-1$ 이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되는 경우는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 -1일 때이다. $\dots\dots ①$

즉, $P\left(t, -\frac{1}{2}t^2+2\right)$ 라 하면 $f'(t)=-1$ 이므로

$$-t=-1 \quad \therefore t=1$$

$$\therefore P\left(1, \frac{3}{2}\right) \quad \dots\dots ②$$

직선 AB의 방정식은

$$y-2=-(x-0) \quad \therefore x+y-2=0$$

점 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|1+\frac{3}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값 S는

$$S=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 100S=100 \times \frac{1}{2}=50 \quad \dots\dots ③$$

답 50

채점기준	배점
① $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대가 되는 경우 설명하기	1
② 점 P의 좌표 구하기	2
③ 100S의 값 구하기	3

20 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되려면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x)\{f(x)+k\} &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(-x)\{f(x)+k\} \\
 &= f(-1)\{f(1)+k\}
 \end{aligned}$$

이어야 한다. $\dots\dots ①$

$-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(-x)\{f(x)+k\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+k\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) \times \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+k\}$$

$$= 2(1+k) \quad \dots\dots ②$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(-x)\{f(x)+k\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+k\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) \times \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+k\}$$

$$= 3(3+k) \quad \dots\dots ③$$

$$\text{또, } f(-1)\{f(1)+k\}=2(1+k) \quad \dots\dots ④$$

$$\text{따라서 } 2(1+k)=3(3+k)$$

$$2+2k=9+3k \quad \therefore k=-7 \quad \dots\dots ⑤$$

답 -7

채점기준	배점
① 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속일 조건 설명하기	1
② $\lim_{x \rightarrow 1+} f(-x)\{f(x)+k\}$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타내기	2
③ $\lim_{x \rightarrow 1-} f(-x)\{f(x)+k\}$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타내기	2
④ $f(-1)\{f(1)+k\}$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타내기	1
⑤ k 의 값 구하기	1

실전 모의고사 3회

p.162~165

01 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -2 부터 1 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{(1+a+2)-(-8+4a+2)}{3}$$

$$= \frac{-3a+9}{3} = -a+3$$

이 평균변화율이 -3 이므로

$$-a+3=-3 \quad \therefore a=6$$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2+2$ 이므로

$$f'(x)=3x^2+12x$$

$$\therefore f'(-3)=27-36=-9$$

답 ③

02 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x+2)f(x)}{x^2-4}}{\frac{g(x)}{x^2-4}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{\frac{g(x)}{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\frac{g(x)}{x^2-4}} = \frac{6}{3} = 2$$

답 ①

03 $f(x)=x^{12}-3x^5+7x+3$ 이라 하면

$$f(-1)=1+3-7+3=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{12}-3x^5+7x+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$$

이때 $f'(x)=12x^{11}-15x^4+7$ 이므로

$$f'(-1)=-12-15+7=-20$$

답 ②

04 $f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$ 또는 $x=g$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	c	...	e	...	g	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗		↗	극대	↘

① 함수 $f(x)$ 는 $x=d$ 에서 극대가 아니다.

② 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 극소가 아니다.

③ 열린구간 (a, b) 에서 $f'(x)<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, b) 에서 감소한다.

④ 열린구간 (d, e) 에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (d, e) 에서 증가한다.

⑤ 열린구간 (f, g) 에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (f, g) 에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

05 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ 이라 하면 $f'(x)=\frac{2}{3}x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y=2x-6$ 사이의 거리가 최소가 되는 경우는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선의 기울기가 2일 때이다.

즉, $P(t, \frac{1}{3}t^2-1)$ 이라 하면

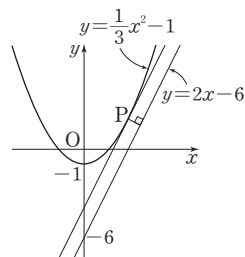
$$f'(t)=2$$

$$f'(t)=\frac{2}{3}t=2 \quad \therefore t=3$$

따라서 점 P(3, 2)와 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-2-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ②



06 $f(x)=x^3+ax^2-24x-12$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax-24$
미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 극솟값을 가지므로
 $f'(4)=0$

$$f'(4)=48+8a-24=0, 8a=-24 \quad \therefore a=-3$$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-24x-12$ 이므로

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	16	↘	-92	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 16을 갖는다.

답 ②

07 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{a\sqrt{x+2}+b} = 1$ 에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일

때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x+2}+b) = 0$$

$$2a+b=0 \quad \therefore b=-2a \quad \dots\dots ①$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{a\sqrt{x+2}+b} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{a\sqrt{x+2}-2a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{a(x-2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}+2}{a} = \frac{2+2}{a} = \frac{4}{a} = 1
\end{aligned}$$

이므로 $a=4$

$a=4$ 를 ㉠에 대입하면

$$b = -2 \times 4 = -8$$

$$\therefore a-b = 4 - (-8) = 12$$

답 ③

08 $f(x)g(x) = |x-a|(2x+8)$

$$= \begin{cases} (x-a)(2x+8) & (x \geq a) \\ -(x-a)(2x+8) & (x < a) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = f(a)g(a) = 0$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

또, 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x-a)(2x+8)}{x-a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a+} (2x+8) \\
&= 2a+8 \\
\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{-(x-a)(2x+8)}{x-a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a-} \{-(2x+8)\} \\
&= -2a-8
\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2a+8 = -2a-8$$

$$4a = -16 \quad \therefore a = -4$$

답 ①

09 $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x$ 라 하면

$$f'(x) = -3x^2 - 4x + 2$$

원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(t, -t^3 - 2t^2 + 2t)$ 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = -3t^2 - 4t + 2 \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$y = (-3t^2 - 4t + 2)(x-t) - t^3 - 2t^2 + 2t$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = -t(-3t^2 - 4t + 2) - t^3 - 2t^2 + 2t$$

$$3t^3 + 4t^2 - 2t - t^3 - 2t^2 + 2t = 0$$

$$2t^3 + 2t^2 = 0, \quad t^2(t+1) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=-1$$

즉, 접선의 기울기는

$$t=0 \text{ 일 때, } f'(0)=2$$

$$t=-1 \text{ 일 때, } f'(-1) = -3+4+2=3$$

따라서 모든 접선의 기울기의 합은

$$2+3=5$$

답 ⑤

10 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 \times 0 = 0,$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\
&= -1 \times 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = -1 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 \times 1 = 1,$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\
&= -1 \times (-1) = 1,
\end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = -1 \times 1 = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) \neq f(1)g(1)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)\}^2$

$$= \{\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)\}^2 = 1^2 = 1,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)\}^2 \\
&= \{\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)\}^2 \\
&= (-1)^2 = 1,
\end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = \{f(1)\}^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$ 는 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

11 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 2$ (거짓)

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ (참)}$$

$\neg$. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = f(1) = 1$$

$$x \rightarrow 1 \text{ 일 때 } t \rightarrow 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = 1$$

$$\text{또, } f(f(1)) = f(1) = 1$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) = f(f(1)) \text{ 이므로 함수}$$

$$f(f(x)) \text{는 } x=1 \text{에서 연속이다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

12 가격을 x 원 올릴 때, 하루에 남긴 총 이익금을 $f(x)$ 원이라 하면

$$f(x) = (30+x)(900-x^2)$$

$$f'(x) = (900-x^2) + (30+x) \times (-2x)$$

$$= -3x^2 - 60x + 900$$

$$= -3(x+30)(x-10)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=10 \text{ (} \because 0 < x < 30 \text{)}$$

$0 < x < 30$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	10	...	30
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	32000	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=10$ 에서 최대이므로 이익금이 최대가 되도록 제품의 가격을 정할 때, 하루에 남긴 총 이익금은 32000원이다. 답 ③

- 13 임의의 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x-4, x+4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-4, x+4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+4)-f(x-4)}{(x+4)-(x-4)} = \frac{f(x+4)-f(x-4)}{8} = f'(c)$$

를 만족시키는 c 가 열린구간 $(x-4, x+4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+4)-f(x-4)}{8} = \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+4)-f(x-4)\} = 3 \times 8 = 24 \quad \text{답 ⑤}$$

- 14 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2 \text{에서 } f(3) = 0$$

즉, 다항식 $f(x)$ 는 $x-1, x-3$ 을 인수로 가지므로

$f(x) = (x-1)(x-3)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항식)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)g(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= -2g(1) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } g(1) = -1$$

또,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)g(x)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) \times \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \\ &= 2g(3) \quad (\because g(x) \text{는 연속함수}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } g(3) = 1$$

이때 $g(x)$ 는 연속함수이고 $g(1)g(3) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $(x-1)(x-3)g(x) = 0$ 은 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 적어도 3개의 실근을 가지므로

$$n = 3 \quad \text{답 ③}$$

- 15 $f(t)$ 는 집합 $\{x | tx^2 - 2(t+2)x + 2t + 1 = 0, x \text{는 실수}\}$ 의 원소의 개수이므로 x 에 대한 방정식 $tx^2 - 2(t+2)x + 2t + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수이다.

(i) $t=0$ 일 때, $tx^2 - 2(t+2)x + 2t + 1 = 0$ 에서

$$-4x + 1 = 0, -4x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(0) = 1$$

(ii) $t \neq 0$ 일 때

x 에 대한 이차방정식 $tx^2 - 2(t+2)x + 2t + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(t+2)\}^2 - t(2t+1) = -t^2 + 3t + 4 \\ &= -(t+1)(t-4) \end{aligned}$$

$$\frac{D}{4} > 0, \text{ 즉 } -1 < t < 0 \text{ 또는 } 0 < t < 4 \text{일 때, 이차방정식}$$

$tx^2 - 2(t+2)x + 2t + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(t) = 2$

$$\frac{D}{4} = 0, \text{ 즉 } t = -1 \text{ 또는 } t = 4 \text{일 때, 이차방정식}$$

$tx^2 - 2(t+2)x + 2t + 1 = 0$ 은 중근을 가지므로 $f(t) = 1$

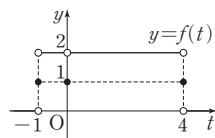
$$\frac{D}{4} < 0, \text{ 즉 } t < -1 \text{ 또는 } t > 4 \text{일 때, 이차방정식}$$

$tx^2 - 2(t+2)x + 2t + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 가지므로 $f(t) = 0$

(i), (ii)에서

$$f(t) = \begin{cases} 2 & (-1 < t < 0 \text{ 또는 } 0 < t < 4) \\ 1 & (t = -1 \text{ 또는 } t = 0 \text{ 또는 } t = 4) \\ 0 & (t < -1 \text{ 또는 } t > 4) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(t) = 1$ 을 만족시키는 실수 t 는 $-1, 0, 4$ 의 3개이다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 2, f(0) = 1$ 이므로 함수 $f(t)$ 는 $t=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 2, \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = 0$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow -1+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow -1-} f(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 4+} f(t) = 0, \lim_{t \rightarrow 4-} f(t) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 4+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow 4-} f(t)$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow a+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow a-} f(t)$ 인 실수 a 는 $-1, 4$ 의 2개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 답 ②

$$\text{참고 (ii) } \frac{D}{4} = -(t+1)(t-4) > 0 \text{에서}$$

$$(t+1)(t-4) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 4$$

그런데 $t \neq 0$ 이므로

$$-1 < t < 0 \text{ 또는 } 0 < t < 4$$

16 $f(x) = x^3 - ax^2 - 5a^2x - 3a^3 = (x-3a)(x+a)^2$

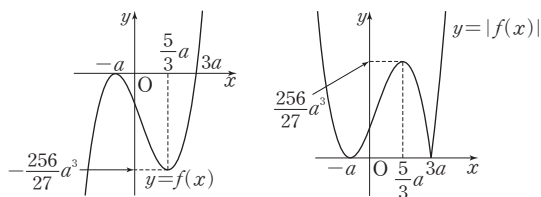
$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 5a^2 = (3x-5a)(x+a)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -a$ 또는 $x = \frac{5}{3}a$

(i) $a > 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-a$	...	$\frac{5}{3}a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{256}{27}a^3$	↗

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



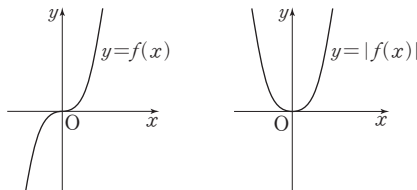
함수 $|f(x)|$ 가 $x=k$ 에서 극값을 갖는 모든 실수 k 가 열린구간 $(-2, 4)$ 에 존재하려면 $-2 < -a$ 이고 $3a < 4$ 이어야 한다. 즉,

$a < 2$ 이고 $a < \frac{4}{3}$ $\therefore a < \frac{4}{3}$

이때 $a > 0$ 이므로 $0 < a < \frac{4}{3}$

(ii) $a = 0$ 일 때

$f(x) = x^3$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

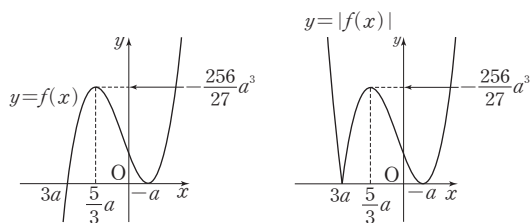


이때 함수 $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖고 $-2 < 0 < 4$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a < 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{5}{3}a$	...	$-a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{256}{27}a^3$	↘	0	↗

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $|f(x)|$ 가 $x=k$ 에서 극값을 갖는 모든 실수 k 가 열린구간 $(-2, 4)$ 에 존재하려면 $-2 < 3a$ 이고 $-a < 4$ 이어야 한다. 즉,

$a > -\frac{2}{3}$ 이고 $a > -4$ $\therefore a > -\frac{2}{3}$

이때 $a < 0$ 이므로 $-\frac{2}{3} < a < 0$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$-\frac{2}{3} < a < \frac{4}{3}$

답 ④

17 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x^2-1} = 3$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-5\} = 0$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ($\because f(x)$ 는 연속함수) ①

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x+1} \times \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right\} = \frac{1}{2} f'(1) = 3$$

이므로 $f'(1) = 6$ ②

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, 5)$ 에서의 접선의 방정식은

$y-5=6(x-1)$

$\therefore y=6x-1$ ③

따라서 구하는 접선의 y 절편은 -1 이다. ④

답 -1

채점기준	배점
① $f(1)$ 의 값 구하기	2
② $f'(1)$ 의 값 구하기	2
③ 접선의 방정식 구하기	1
④ 접선의 y 절편 구하기	1

18 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^2 - x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(t)}{t^3} - 1}{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) - t^3}{t - t^2}$$
$$= 1$$
 ①

이때 극한값이 1이고, 분모 $t-t^2$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로 분자 $f(t)-t^3$ 은 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수이다.

즉, $f(t)-t^3 = -t^2 + at + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$f(t) = t^3 - t^2 + at + b$

$\therefore f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x^2+2x-3} = -\frac{5}{4}$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + ax + b - 1}{(x+3)(x-1)} = -\frac{5}{4}$ ⑦

이때 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + ax + b - 1) = 0$

$$1-1+a+b-1=0 \quad \therefore b=-a+1 \quad \dots\dots ②$$

이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + ax + b - 1}{(x+3)(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + ax - a}{(x+3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + a)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + a}{x+3} \\ &= \frac{a+1}{4} = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a+1=-5 \quad \therefore a=-6$$

$$\text{이때 } b=-a+1=6+1=7 \text{ 이므로}$$

$$f(x)=x^3-x^2-6x+7 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore f(-1)=-1-1+6+7=11 \quad \dots\dots ④$$

답 11

채점기준	배점
① $\frac{1}{x}=t$ 로 놓고 주어진 극한을 t 에 대한 극한으로 나타내기	1
② $f(x)=x^3-x^2+ax+b$ 라 하고 a, b 사이의 관계식 세우기	2
③ $f(x)$ 구하기	2
④ $f(-1)$ 의 값 구하기	1

19 조건 (가)의 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)+6}{x-2}=12$ 에서 극한값이 존재하고

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)g(x)+6\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)=-6$$

이때 $f(x), g(x)$ 가 연속함수이므로

$$f(2)g(2)=\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)=-6 \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)+6}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2} \\ &= f'(2)g(2)+f(2)g'(2) \\ &= 12 \quad \dots\dots ② \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f(2)=3$ 을 ①에 대입하면

$$3g(2)=-6 \quad \therefore g(2)=-2 \quad \dots\dots ③$$

한편, $g(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$g'(x)=a$$

조건 (다)에서 $g(0)+g'(0)=b+a=0$

$$\therefore b=-a \quad \dots\dots ④$$

$$\text{또, ③에서 } g(2)=2a+b=-2 \quad \dots\dots ⑤$$

$$\text{④, ⑤을 연립하여 풀면 } a=-2, b=2$$

$$\text{따라서 } g'(x)=-2 \text{ 이므로 } g'(2)=-2 \quad \dots\dots ⑥ \quad \dots\dots ③$$

④, ⑥을 ②에 대입하면

$$f'(2) \times (-2) + 3 \times (-2) = 12$$

$$-2f'(2)=18 \quad \therefore f'(2)=-9 \quad \dots\dots ④$$

답 -9

참고 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)-f(x)g(2)+f(x)g(2)-f(2)g(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ f(x) \times \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \right\} + \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times g(2) \right\} \\ &= f(2)g'(2)+f'(2)g(2) \end{aligned}$$

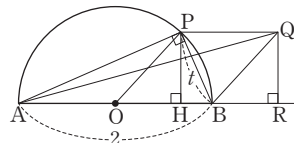
채점기준	배점
① $f(2)g(2)$ 의 값 구하기	1
② $f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$ 의 값 구하기	2
③ $g(2), g'(2)$ 의 값 구하기	2
④ $f'(2)$ 의 값 구하기	1

20 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PA}$ 를 그

고, 두 점 P, Q에서 직선 AB

에 내린 수선의 발을 각각 H,

R라 하자.



$\angle APB=90^\circ$ 이므로 직각삼각형 PAB에서

$$\overline{PA}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BP}^2}=\sqrt{2^2-t^2}=\sqrt{4-t^2}$$

이때 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PH} \times \overline{AB}$ 이므로

$$\sqrt{4-t^2} \times t = \overline{PH} \times 2 \quad \therefore \overline{PH} = \frac{t\sqrt{4-t^2}}{2} \quad \dots\dots ①$$

직각삼각형 OHP에서

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{t^2(4-t^2)}{4}} = \sqrt{\frac{4-t^2(4-t^2)}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{t^4-4t^2+4}{4}} = \sqrt{\frac{(t^2-2)^2}{4}} \\ &= \frac{2-t^2}{2} \quad (\because 0 < t < \sqrt{2}) \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

이때 $\overline{OP} \parallel \overline{BQ}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{OB}$ 이므로 $\square OBQP$ 는 평행사변형이다.

$\triangle POH$ 와 $\triangle QBR$ 에서

$\angle OHP = \angle BRQ = 90^\circ$, $\overline{OP} = \overline{BQ}$, $\overline{PH} = \overline{QR}$ 이므로

$\triangle POH \cong \triangle QBR$ (RHS 합동)

즉, $\overline{OH} = \overline{BR}$ 이므로 직각삼각형 ARQ에서

$$\overline{AR} = \overline{AB} + \overline{BR} = 2 + \overline{OH} = 2 + \frac{2-t^2}{2} = 3 - \frac{t^2}{2}$$

$$\overline{QR} = \overline{PH} = \frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}$$

직각삼각형 ARQ에서

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \sqrt{\overline{AR}^2 + \overline{QR}^2} = \sqrt{\left(3 - \frac{t^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{9 - 3t^2 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2(4-t^2)}{4}} = \sqrt{9 - 2t^2} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{\sqrt{5}-\overline{AQ}}{t^2-2} &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{\sqrt{5}-\sqrt{9-2t^2}}{t^2-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{9-2t^2})(\sqrt{5}+\sqrt{9-2t^2})}{(t^2-2)(\sqrt{5}+\sqrt{9-2t^2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{5-(9-2t^2)}{(t^2-2)(\sqrt{5}+\sqrt{9-2t^2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2t^2-4}{(t^2-2)(\sqrt{5}+\sqrt{9-2t^2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2(t^2-2)}{(t^2-2)(\sqrt{5}+\sqrt{9-2t^2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{9-2t^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{1}{5}$ 이므로

$$20k = 20 \times \frac{1}{5} = 4$$

..... ④

답 4

채점기준	배점
① PA, PH의 길이를 t 에 대한 식으로 나타내기	2
② OH의 길이를 t 에 대한 식으로 나타내기	2
③ AQ의 길이를 t 에 대한 식으로 나타내기	2
④ $20k$ 의 값 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.166~169

01 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x+1) = 2+1=3,$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (ax^2 - 2x + 3) = 4a - 4 + 3 = 4a - 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이어야
하므로

$$3 = 4a - 1, 4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

답 ④

02 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\}$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{1+1+1} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

답 ⑤

03 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 = 12$$

$$\text{이므로 } a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

답 ②

04 $f(x) = x^3 - 2x + 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2$

점점의 좌표를 $(t, t^3 - 2t + 2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울
기는 $f'(t) = 3t^2 - 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - 2t + 2) = (3t^2 - 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 2)x - 2t^3 + 2 \quad \dots\dots ⑦$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = -2t^3 + 2, 2t^3 + 2 = 0, t^3 + 1 = 0$$

$$(t+1)(t^2 - t + 1) = 0$$

$$\therefore t = -1 (\because t^2 - t + 1 > 0)$$

$t = -1$ 을 ⑦에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = x + 4$$

따라서 구하는 접선의 x 절편은 -4 이다.

답 ①

05 $x \neq -1$ 일 때, $f(x) = \frac{ax^3 - bx}{x+1}$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^3 - bx}{x+1} = f(-1)$$

이어야 한다. 이때 극한값이 존재하고 $x \rightarrow -1$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (ax^3 - bx) = 0$$

$$-a + b = 0 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots ⑦$$

$$\therefore f(x) = \frac{ax^3 - ax}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$\text{이때 } f(3) = 12 \text{이므로 } \frac{27a - 3a}{4} = 12, 24a = 48 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{⑦에서 } b = 2$$

$$\text{따라서 } x \neq -1 \text{일 때 } f(x) = \frac{2x^3 - 2x}{x+1} \text{이므로}$$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 2x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x(x+1)(x-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} 2x(x-1)$$

$$= -2 \times (-2) = 4$$

답 ②

06 $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성
립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax - 3a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에
대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식
을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-3) \times (-3a) = a^2 - 9a \leq 0$$

$$a(a-9) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 9$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 9의 10개이다.

답 ③

07 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이지

만 $f(1) = 1$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

$$\therefore a = 1$$

$$\text{이때 } f(a-1) = f(0) = 1 \text{이므로 } b = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$$

답 ①

08 $f(x) = 2x^3 + ax + b$ 라 하면 $f'(x) = 6x^2 + a$

$$f(-1) = 3 \text{에서}$$

$$-2 - a + b = 3 \quad \therefore b = a + 5 \quad \dots\dots ⑦$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1) = 6 + a$$

이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$(a+6) \times \frac{1}{2} = -1, a+6 = -2 \quad \therefore a = -8$$

$a = -8$ 을 ㉠에 대입하면

$$b = -8 + 5 = -3$$

$$\therefore ab = -8 \times (-3) = 24$$

답 ④

09 조건 (가)의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+4}{x} = 2$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일

때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+4\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4$$

$$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4 \quad (\because f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 2$$

또, 조건 (나)의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^3+4x} = -3$ 에서 극한값이 존재하고

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\therefore g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad (\because g(x) \text{는 연속함수})$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^3+4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x(x^2+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \times \frac{1}{x^2+4} \right\} \\ &= g'(0) \times \frac{1}{4} = -3 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } g'(0) = -12$$

한편, $h(x) = f(x)g(x)$ 에서

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\therefore h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

$$= 2 \times 0 + (-4) \times (-12)$$

$$= 48$$

답 ①

10 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$a+2$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$	$a+18$

따라서 $-1 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값

$a+18$, $x=1$ 에서 최솟값 $a-2$ 를 가지므로

$$M = a+18, m = a-2$$

이때 $M+m=22$ 이므로

$$(a+18) + (a-2) = 22, 2a = 6$$

$$\therefore a = 3$$

답 ③

11 ㄱ. [반례] $f(x) = x, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ 이라 하면

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a\beta \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. [반례]} f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, g(x) = x \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$g(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0^-$ 이면 $t \rightarrow 0^-$ 이고

$x \rightarrow 0^+$ 이면 $t \rightarrow 0^+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1 \text{이므로}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x))$, 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ 의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

12 ㄱ. $f(x) + g(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$ 은 $x \neq 2$ 인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(x) + g(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. $f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{x-2} + 2$ 는 $x \neq 2$ 인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(g(x))$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. $g(f(x)) = g(x+2) = \frac{1}{x}$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다. 또,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

이므로 $g(f(x))$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 최댓값도 최솟값도 갖지 않는다.

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

13 함수 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$t < 0 \text{일 때, } f(t) = 0$$

$$t = 0 \text{일 때, } f(t) = 2$$

$$0 < t < 4 \text{일 때, } f(t) = 4$$

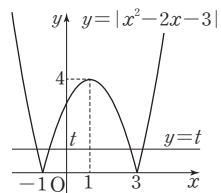
$$t = 4 \text{일 때, } f(t) = 3$$

$$t > 4 \text{일 때, } f(t) = 2$$

$$\text{따라서 } f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0 \text{ 또는 } t > 4) \\ 4 & (0 < t < 4) \\ 3 & (t = 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) = 4$$

답 ④



14 $f(x)=2x^4+4ax^3+x^2+1$ 에서

$$f'(x)=8x^3+12ax^2+2x=2x(4x^2+6ax+1)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

그런데 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 $x=0$ 을 한 근으로 갖고, 이차방정식 $4x^2+6ax+1=0$ 은 $x=0$ 을 근으로 갖지 않으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 삼중근을 가질 수 없다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+6ax+1=0$ 이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(3a)^2-4 \times 1=9a^2-4 < 0, (3a+2)(3a-2) < 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} < a < \frac{2}{3}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+6ax+1=0$ 이 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4}=9a^2-4=0 \quad \therefore a=\pm \frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}$$

따라서 $M=\frac{2}{3}, m=-\frac{2}{3}$ 이므로

$$Mm=\frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{9} \quad \text{답 ②}$$

15 조건 ㉞에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 8인 이차함수이므로

$f(x)=8x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면 조건 ㉞에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2+ax+b-1}{x} = -10 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

㉞에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (8x^2+ax+b-1)=0, b-1=0 \quad \therefore b=1$$

따라서 ㉞에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2+ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (8x+a) = a = -10$$

이므로 $f(x)=8x^2-10x+1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}+f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}+8x^2-10x+1}{x-1}$$

이때 $g(x)=x^{20}+8x^2-10x+1$ 라 하면 $g(1)=1+8-10=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}+8x^2-10x+1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$$

이때 $g'(x)=20x^{19}+16x-10$ 이므로

$$g'(1)=20+16-10=26 \quad \text{답 ④}$$

16 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 원점 O이므로

삼각형 ABO는 직각이등변삼각형이다. 따라서 $\angle ABO=45^\circ$ 이므로 직선 AB의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x \text{라 하면 } f'(x)=x^2-2$$

직선 AB와 곡선 $y=f(x)$ 의 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{3}t^3-2t\right)$

($t < 0$)라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=1$$

$$t^2-2=1, t^2=3 \quad \therefore t=-\sqrt{3} (\because t < 0)$$

즉, 접점의 좌표가 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$$y-\sqrt{3}=x-(-\sqrt{3}) \quad \therefore y=x+2\sqrt{3}$$

따라서 A(0, $2\sqrt{3}$), B($-2\sqrt{3}$, 0)이므로

$$\triangle ABO = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6$$

$$\therefore \square ABCD = 4\triangle ABO = 4 \times 6 = 24 \quad \text{답 ②}$$

$$17 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2) = -4$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h} \times (-1)$$

$$= -f'(-1) = -5$$

$$\therefore f'(-1) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$f'(2)=-4 \text{에서}$$

$$12+4a+b=-4 \quad \therefore 4a+b=-16 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$$f'(-1)=5 \text{에서}$$

$$3-2a+b=5 \quad \therefore -2a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

㉞, ㉟을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-4x+2$ 이므로

$$f(-1)=-1-3+4+2=2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 2

채점기준	배점
① $f'(2), f'(-1)$ 의 값 각각 구하기	3
② a, b 의 값 각각 구하기	2
③ $f(-1)$ 의 값 구하기	1

18 $f(x)=x^3+ax, g(x)=2x^3+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=6x^2+b$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$f(-1)=3 \text{에서}$$

$$-1-a=3 \quad \therefore a=-4$$

$$g(-1)=3 \text{에서}$$

$$-2-b+c=3 \quad \therefore c=b+5 \quad \dots\dots \textcircled{㉞} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(-1, 3)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(-1)=g'(-1) \text{에서}$$

$$3+a=6+b, -1=6+b (\because a=-4)$$

$$\therefore b=-7$$

$$b=-7을 \textcircled{7}에 대입하면 c=-2$$

$$\therefore a+b+c=-4+(-7)+(-2)=-13$$

..... ②

..... ③

답 -13

채점기준	배점
① a의 값과 b, c 사이의 관계식 구하기	3
② b, c의 값 각각 구하기	2
③ a+b+c의 값 구하기	1

19 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $10-2x$ ($0 < x < 5$)인 정삼각형

이고, 상자의 높이는 $x \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (10-2x)^2 \times \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$= x^3 - 10x^2 + 25x$$

..... ①

이므로

$$V'(x) = 3x^2 - 20x + 25 = (3x-5)(x-5)$$

$$0 < x < 5 \text{이므로 } V'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{5}{3}$$

$0 < x < 5$ 에서 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{5}{3}$	...	5
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{500}{27}$	$\searrow$	

따라서 상자의 부피는 $x=\frac{5}{3}$ 일 때 최대이고, 상자의 부피의 최대

값은 $\frac{500}{27}$ 이므로

$$a=\frac{5}{3}, M=\frac{500}{27}$$

..... ②

$$\therefore \frac{M}{a^3} = \frac{500}{27} \div \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{500}{27} \times \frac{27}{125} = 4$$

..... ③

답 4

채점기준	배점
① 상자의 부피 $V(x)$ 를 x 에 대한 식으로 나타내기	2
② a, M의 값 각각 구하기	3
③ $\frac{M}{a^3}$ 의 값 구하기	1

20 함수 $\{g(x)\}^2$ 이 $x=0$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0-} \{g(x)\}^2 = \{g(0)\}^2$$

이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x+2)\}^2$$

$$= \{f(2)\}^2 (\because \{f(x+2)\}^2 \text{은 연속함수})$$

$$= k^2$$

..... ①

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x-2)\}^2$$

$$= \{f(-2)\}^2 (\because \{f(x-2)\}^2 \text{은 연속함수})$$

$$= (8+k)^2$$

..... ②

$$\text{또, } \{g(0)\}^2 = \{f(2)\}^2 = k^2$$

..... ③

따라서 $k^2 = (8+k)^2$ 이므로

$$k^2 = 64 + 16k + k^2, 16k = -64$$

$$\therefore k = -4$$

..... ④

답 -4

채점기준	배점
① $\lim_{x \rightarrow 0+} \{g(x)\}^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타내기	2
② $\lim_{x \rightarrow 0-} \{g(x)\}^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타내기	2
③ $\{g(0)\}^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타내기	1
④ k의 값 구하기	2

실전 모의고사 5회

p.170~173

$$01 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 9x - 10}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 10)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 10}{x+1}$$

$$= \frac{1+1+10}{1+1} = 6$$

답 ②

$$02 f(x) = (3x-a)^3 = (3x-a)(3x-a)(3x-a) \text{에서}$$

$$f'(x) = 3(3x-a)(3x-a) + 3(3x-a)(3x-a)$$

$$+ 3(3x-a)(3x-a)$$

$$= 9(3x-a)^2$$

$$f'(2) = 144 \text{에서}$$

$$9(6-a)^2 = 144, (6-a)^2 = 16$$

$$6-a = \pm 4 \quad \therefore a = 2 (\because a < 10)$$

따라서 $f'(x) = 9(3x-2)^2$ 이므로

$$f'(1) = 9 \times (3-2)^2 = 9$$

답 ⑤

$$03 f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \text{이라 하면 함수 } f(x) \text{는 모든 실수 } x \text{에서 연속이고}$$

$$f(-2) = -19, f(-1) = -5, f(0) = -1,$$

$$f(1) = -1, f(2) = 1, f(3) = 11$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$$f(x) = 0 \text{의 실근이 존재하는 구간은 } \textcircled{4} (1, 2) \text{이다.}$$

답 ④

$$04 f(x) = 2x^3 - 7x \text{에서 } f'(x) = 6x^2 - 7 \text{이므로}$$

$$f(-2) = -16 + 14 = -2, f'(-1) = 6 - 7 = -1$$

$$\frac{f(a) - f(-2)}{a+2} = f'(-1) \text{에서}$$

$$\frac{2a^3 - 7a + 2}{a+2} = -1, \frac{(a+2)(2a^2 - 4a + 1)}{a+2} = -1$$

$$2a^2 - 4a + 1 = -1 (\because a+2 \neq 0), 2a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, (a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

답 ④

05 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-4h)}{3h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) - \{f(1-4h) - f(1)\}}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{3h} - \frac{f(1-4h) - f(1)}{3h} \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \frac{1}{3} - \frac{f(1-4h) - f(1)}{-4h} \times \frac{-4}{3} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} f'(1) + \frac{4}{3} f'(1) = \frac{5}{3} f'(1)$$

이때 $f'(x) = -x^2 - 3x + 7$ 이므로 $f'(1) = -1 - 3 + 7 = 3$

$$\therefore \frac{5}{3} f'(1) = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

답 ⑤

06 $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = 0$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = 0 + 1 = 1$$

답 ②

07 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 3$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = -3$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 에 접하고 기울기가 -3 인 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 3t^2 - 3t)$ 라 하면

$$f'(t) = -3, 3t^2 + 6t - 3 = -3$$

$$3t^2 + 6t = 0, 3t(t+2) = 0$$

$$\therefore t = -2 (\because t \neq 0)$$

즉, 접점의 좌표는 $(-2, 10)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 10 = -3(x + 2)$$

$$\therefore y = -3x + 4$$

이 직선이 점 $(k, 13)$ 을 지나므로

$$13 = -3k + 4 \quad \therefore k = -3$$

답 ①

08 학생이 줄넘기를 시작한 지 x 분 후의 혈압을 $f(x)$ mmHg라 하면 함수 $f(x)$ 는 $x > 0$ 에서 연속이다.

이때 $f(10) < 100 < f(15)$, $f(30) < 100 < f(25)$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c) = 100$ 인 c 가 열린구간 $(10, 15)$, $(25, 30)$ 에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 학생이 줄넘기를 시작한 후 30분 동안 혈압이 100 mmHg인 순간이 적어도 2번 있었다고 할 수 있으므로

$$k = 2$$

답 ②

09 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(2+h) + |(2+h) - 2|^3 - 6}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h + |h|^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} (3 + h^2) = 3,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3(2+h) + |(2+h) - 2|^3 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h + |h|^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h + (-h)^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h - h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (3 - h^2) = 3$$

$$\therefore f'(2) = 3$$

답 ④

10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ 에서 다항함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^2} = 2$ 에서 삼차식 $f(x)$ 는 $(x+1)^2$ 을 인수로 갖는다. 즉, $f(x) = (x+a)(x+1)^2$ (a 는 상수)이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+a)(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x+a) = -1 + a = 2$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 $f(x) = (x+3)(x+1)^2$ 이므로

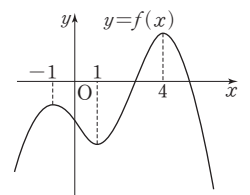
$$f(1) = 4 \times 2^2 = 16$$

답 ②

11 $y = f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(-1) = f'(1) = f'(4) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	4	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

이때 $f(-1) < 0 < f(4)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore f(x)$ 는 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 감소하고 $f(-1) < 0$ 이므로 $f(0) < 0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

12 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{(x-2) \times x\} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \{(-x+2)(x+a)\} = a+1,$$

$$f(1)g(1) = -1 \times 1 = -1$$

이므로

$$-1 = a+1 \quad \therefore a = -2$$

답 ②

13 $\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2)$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 미분가능하므로 $x = -2$ 에서 연속이다. (참)

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= f'(-2) = 1 \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+2h) - f(-2-h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+2h) - f(-2) - \{f(-2-h) - f(-2)\}}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(-2+2h) - f(-2)}{2h} \times \frac{2}{3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(-2-h) - f(-2)}{-h} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} f'(-2) + \frac{1}{3} f'(-2) \\ &= f'(-2) = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서

연속이고, $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \geq -2) \\ -x-2 & (x < -2) \end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x+2) - 0}{x+2} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{-x-2-0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \neq \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$

즉, $f'(-2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른풀이 ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(-2+h)+2\} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{-(-2+h)-2\} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

즉, $f'(-2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

14 $y = (x^2 - 4x + 4)^3 - 3(x^2 - 4x + 4) - 6$ 에서

$$t = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \text{으로 놓으면}$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{일 때 } 0 \leq t \leq 4 \text{이고}$$

$$y = t^3 - 3t - 6$$

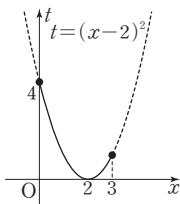
$$g(t) = t^3 - 3t - 6 \text{이라 하면}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t+1)(t-1)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = 1 \text{ (} \because 0 \leq t \leq 4 \text{)}$$

$0 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	4
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	-6	↘	-8	↗	46



따라서 $0 \leq t \leq 4$ 일 때, 함수 $g(t)$ 는 $t = 4$ 에서 최댓값 46, $t = 1$ 에서 최솟값 -8을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

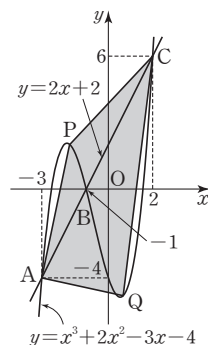
$$46 + (-8) = 38$$

답 ③

15 세 점 $A(-3, -4)$, $B(-1, 0)$, $C(2, 6)$ 은 직선 $y = 2x + 2$ 위의 점이 오른쪽 그림에서

$$\square AQCP = \triangle PAC + \triangle AQC$$

삼각형 PAC의 넓이가 최대인 경우는 점 P와 선분 AC 사이의 거리가 최대일 때이므로 점 P에서의 접선이 선분 AC와 평행해야 한다. 즉, 점 P에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.



같은 방법으로 삼각형 AQC의 넓이가 최대하려면 점 Q에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$$

점점의 좌표를 $(t, t^3 + 2t^2 - 3t - 4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 + 4t - 3$$

접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = 2 \text{에서 } 3t^2 + 4t - 3 = 2$$

$$\therefore 3t^2 + 4t - 5 = 0$$

사각형 AQCP의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q의 x 좌표는 이 이차방정식의 두 실근이므로 두 점 P, Q의 x 좌표의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{5}{3}$ 이다. 답 ②

참고 이차방정식 $3t^2 + 4t - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 3 \times (-5) = 19 > 0$$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^3 + (2a+3)x^2 - 14x + 24}{x-2} = f(2)$$

에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \{x^3 + (2a+3)x^2 - 14x + 24\} = 0$$

$$8 + 4(2a+3) - 28 + 24 = 0, 4(2a+3) = -4$$

$$2a+3 = -1, 2a = -4 \therefore a = -2$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -2x+b & (x \geq 2) \\ \frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x-2} & (x < 2) \end{cases}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (-2x+b) = -4+b,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + x - 12)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + x - 12) = 4 + 2 - 12 = -6,\end{aligned}$$

$$f(2) = -4 + b$$

에서 $-4 + b = -6$ 이므로 $b = -2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \begin{cases} -2x-2 & (x \geq 2) \\ \frac{x^3 - x^2 - 14x + 24}{x-2} & (x < 2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2x-2 & (x \geq 2) \\ x^2 + x - 12 & (x < 2) \end{cases}\end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. $f(-4)=0$ 이므로 함수 $\frac{1}{f(x)}$ 은

$x=-4$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. $0 < x < 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 최댓값 -6 을 갖는다.

(참)

$$\begin{aligned}\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x-2-(-6)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2) = -2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 12 - (-6)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+3) = 2+3=5\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

17 조건 ㄱ에서 $f(-2)=0$, $f(3)=0$ 이므로

$$f(x) = a(x+2)(x-3) \quad (a \text{는 상수}, a \neq 0)$$

..... ①

라 하면 조건 ㄴ에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+2)(x-3)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} a(x-3) = -5a = -20\end{aligned}$$

$$\therefore a = 4$$

따라서 $f(x) = 4(x+2)(x-3)$ 이므로

..... ②

$$f(5) = 4 \times 7 \times 2 = 56$$

..... ③

답 56

채점기준	배점
① $f(x)$ 를 미정계수를 이용하여 나타내기	2
② $f(x)$ 구하기	3
③ $f(5)$ 의 값 구하기	1

18 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 2x + 4) = 1 + 2 + 4 = 7,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax + b) = -a + b,$$

$$f(-1) = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\text{이므로 } -a + b = 7 \quad \therefore b = a + 7$$

..... ①

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & (x \geq -1) \\ ax + a + 7 & (x < -1) \end{cases}$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2 - 2x + 4) - 7}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-3) = -1 - 3 = -4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(ax + a + 7) - 7}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax + a}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} a = a\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a = -4$$

..... ②

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & (x \geq -1) \\ -4x + 3 & (x < -1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-2) = 8 + 3 = 11$$

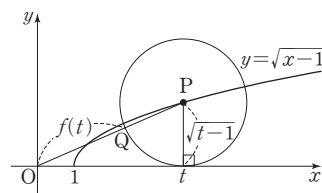
..... ③

답 11

채점기준	배점
① a, b 사이의 관계식 구하기	2
② a, b 의 값 구하기	3
③ $f(-2)$ 의 값 구하기	1

19 원의 중심이 점 $P(t, \sqrt{t-1})$ 이고 원이 x 축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{t-1}$ 이다.

..... ①



위의 그림과 같이 원이 선분 OP 와 만나는 점을 Q 라 하면

$$\begin{aligned}f(t) &= \overline{OP} - \overline{PQ} = \sqrt{t^2 + (\sqrt{t-1})^2} - \sqrt{t-1} \\ &= \sqrt{t^2 + t - 1} - \sqrt{t-1}\end{aligned}$$

..... ②

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10t}{f(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10t}{\sqrt{t^2+t-1}-\sqrt{t-1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10t(\sqrt{t^2+t-1}+\sqrt{t-1})}{(\sqrt{t^2+t-1}-\sqrt{t-1})(\sqrt{t^2+t-1}+\sqrt{t-1})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10t(\sqrt{t^2+t-1}+\sqrt{t-1})}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10(\sqrt{t^2+t-1}+\sqrt{t-1})}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} 10\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}+\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}\right) \\
 &= 10 \times (1+0) = 10 \quad \dots\dots ③
 \end{aligned}$$

답 10

채점기준	배점
① 원의 반지름의 길이 구하기	1
② $f(t)$ 구하기	2
③ $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10t}{f(t)}$ 의 값 구하기	3

20 $f(x) = \begin{cases} -x^3+ax & (x \geq 0) \\ a(x^3-3x) & (x < 0) \end{cases}$

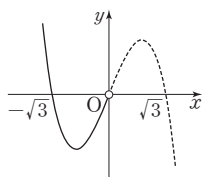
$$= \begin{cases} -x^3+ax & (x \geq 0) \\ ax(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) & (x < 0) \end{cases}$$

이때 함수 $y=ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x < 0)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.

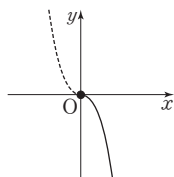
또, $y=-x^3+ax$ 라 하면 모든 실수 x 에 대하여 $y'=-3x^2+a < 0$ ($\because a < 0$)

이므로 함수 $y=-x^3+ax$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

즉, 함수 $y=-x^3+ax$ ($x \geq 0$)의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x < 0$ 인 어떤 x 에서 극솟값을 갖는다. $\dots\dots ②$

$f(x)=a(x^3-3x)(x < 0)$ 에서

$$f'(x)=a(3x^2-3)=3a(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \quad (\because x < 0)$$

$x < 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	0
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	$\searrow$	$2a$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값 $2a$ 를 갖는다. 이때 극솟값이 -3 이므로

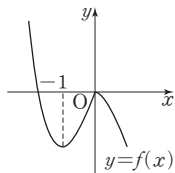
$$2a=-3 \quad \therefore a=-\frac{3}{2} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -x^3-\frac{3}{2}x & (x \geq 0) \\ -\frac{3}{2}(x^3-3x) & (x < 0) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$f(2)=-8-3=-11 \quad \dots\dots ④$$

답 -11

채점기준	배점
① $y=-x^3+ax, y=ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ 의 그래프의 개형 그리기	2
② 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리고 함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖는 x 의 값의 범위 파악하기	1
③ a 의 값 구하기	2
④ $f(2)$ 의 값 구하기	2





A series of horizontal dotted lines for writing, spanning the width of the page.



A series of horizontal dotted lines for writing, spanning the width of the page.